Orgaan van de

Nederlandse Vereniging

van Wiskundeleraren

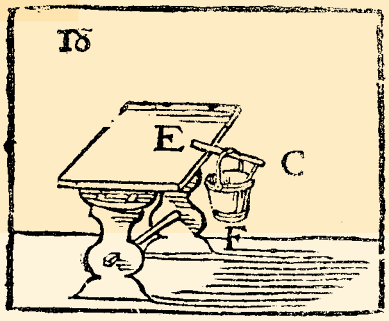
EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 73

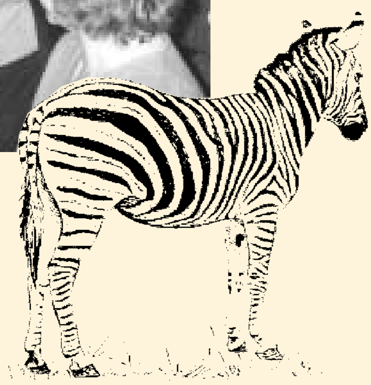
1997-1998 februari

5









Functieonderzoek met de GR

(Indo-)Arabisch worteltrekken

Wisconstighe Vermaecklyckheden

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Redactie

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Contributie per ver. jaar: ƒ 75,00
Studentleden: ƒ 37,50
Leden van de VVWL: ƒ 50,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Adresgegevens auteurs

D. Beckers
Merelstraat 16
6542 WJ Nijmegen

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

J. Derks
Schotse Hooglanden 50
1060 NM Amsterdam

M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

V.E. Schmidt
Verlengde Grachtstraat 43
9717 GE Groningen

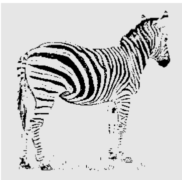
Y. Schuringa
Novapad 4
5632 AE Eindhoven

J. van 't Spijker
Zeven Bosjes 17
7609 BJ Almelo

A. van der Wal
Ordermolenweg 23
7312 SC Apeldoorn

Inhoud


151


163


168

146 Kees Hoogland
Van de redactietafel

147 Joost van 't Spijker
Functieonderzoek met de grafische rekenmachine (1)

150 Rob Bosch
π en de Fibonaccigetallen

151 Bram van der Wal
Jaarvergadering en studiedag 1997

156 Johan Derks
Worteltrekken in (Indo-)Arabische cijfers

160 **Boekbespreking**

161 **Aankondiging HKRWO-symposium**

163 Marian Kollenveld
Van de bestuurstafel
NVvW

164 Hans van Lint
Jaarrede 1997
NVvW

168 Ynske Schuringa
'Onze studenten kiezen enthousiast voor het leraarschap'
INTERVIEW

170 Kees Hoogland
Over de Tweede Fase

171 Danny Beckers
Wisconstighe Vermaecklyck-heden

175 **40 jaar geleden**

176 **Werkbladen**

178 **Boekbespreking**

179 **Aankondiging studiereis**

180 **Kalender**

van de redactietafel



Als u dit blad onder ogen krijgt zijn de meeste methodekeuzebijeenkomsten in dit schooljaar inmiddels al weer achter de rug. Duizenden boeken, katernen en folders hebben inmiddels hun weg gevonden van uitgevers naar docenten en scholen.
Boeken voor de Tweede Fase, voor de herziene kerndoelen basisvorming en voor de onderbouw havo/vwo.
Vooral dat laatste is opmerkelijk. Voor het eerst sinds de invoering van de mammoetwet verschijnen er aparte delen voor de eerste klas havo/vwo.
Wat een onverwachte gevolgen de basisvorming al niet kan hebben. In ons land zijn al veel tweedelingen zichtbaar. Zouden we op weg zijn naar een strikte tweedeling in het onderwijs van havo/vwo enerzijds en vbo/mavo anderzijds?

vbo/mavo

Terug naar de schoolboeken. Na vijf jaar ervaring in de klas liggen er nu van de meeste methoden herziene delen voor de eerste klas vbo/mavo. Het beoordelen daarvan zal voor secties geen sinecure zijn, aangezien er nog wel heel veel onduidelijk is over de invoering van de leerwegen en sectoren.

havo/vwo

Inmiddels liggen er ook voor de bovenbouw havo en vwo van de meeste methoden boeken en/of katernen. Dat geeft docenten en secties in ieder geval de mogelijkheid om op concreter niveau te discussiëren over de invulling en de uitvoering van de Tweede Fase.
Voor scholen die in 1999 starten is het in ieder geval vrij bijzonder dat ze ruim een jaar de tijd hebben om de boeken te bekijken en een keuze te maken. Bij al de invoeringen van nieuwe wiskundeprogramma's de afgelopen jaren was dat nooit het geval. Er kan mogelijk zelfs informatie ingewonnen worden bij collega's die er volgend jaar al mee gaan werken.

In dit nummer

Ook in dit nummer weer een artikel over de Grafische Rekenmachine. Daarin wordt duidelijk dat ook bij het uitbesteden van allerlei werkzaamheden aan het apparaat er door de leerlingen nog steeds goed en wiskundig nagedacht moet worden. Gelukkig maar, zou ik zo zeggen.
Verder vindt u ook weer een kort bericht over de laatste ontwikkelingen in de Tweede Fase. Binnenkort zullen allerlei regelingen en programma's definitief worden vastgesteld en gepubliceerd in Uitleg.
Ook staan er weer veel nieuwe bijeenkomsten in de kalender achterin.

Ten slotte

Ik herhaal het nog maar eens:
de redactie blijft buitengewoon geïnteresseerd in ervaringen in de klas met aardige projecten, werkbladen, onderzoekjes en dergelijke.
Schroom niet om *ideeën* in te zenden. De redactie zal u aan alle kanten behulpzaam zijn bij het bewerken tot een handzaam artikeltje. Het hoeft in eerste instantie heus geen doorwrocht betoog te zijn. Leuk materiaal met iets van de achtergrond, de motivatie en resultaten uit de klas volstaat voor een eerste versie.
In een recente enquête geven de meeste wiskundedocenten aan dat ze graag daarover lezen in Euclides. Dat kan natuurlijk alleen maar als er ook collega's zijn die de pen of het toetsenbord ter hand nemen.

Kees Hoogland

U KUNT ZICH NOG OPGEVEN

Regionale bijeenkomsten NVvW

do 12 maart 1998, Leiden

wo 18 maart 1998, Zwolle

di 24 maart 1998, Eindhoven

Zie Euclides 73-4 voor het programma.

Functie-onderzoek met de grafische rekenmachine (1)

Joost van 't Spijker

Inleiding

In dit verhaal wil ik eens bekijken wat de consequenties zijn voor het 'klassieke' functieonderzoek, wanneer de grafische rekenmachine gebruikt mag worden. Ik redeneer hierbij vanuit de leerling, dat wil zeggen dat ik stappen neem die een leerling waarschijnlijk ook zal nemen. Ten einde het verhaal leesbaar te houden zal ik niet alle stappen van het functieonderzoek behandelen. Allereerst zal ik een korte beschrijving geven van het fenomeen grafische rekenmachine.

De grafische rekenmachine

Een goede definitie geven van wat een grafische rekenmachine is, is heel erg moeilijk omdat die er gewoonweg niet is. Wel is het mogelijk om te beschrijven wat wij in het algemeen bedoelen als we praten over een grafische rekenmachine. Dit klinkt nogal vaag, maar dat zal direct duidelijk worden. Rekenmachines die behalve rekenen ook grafieken kunnen tekenen, bestaan al meer dan tien jaar. In de jaren tachtig had Casio een reeks machines op de markt met een meerregelige display, bijvoorbeeld de PB-700. Deze machines waren programmeerbaar en voor degene die die kunst verstond was het mogelijk om grafieken te tekenen met behulp van een eigen programmaatje. Ook Hewlett Packard had in die tijd een aantal machines met een grafische display, onder andere de HP28S, waarmee een functie kon worden ingevoerd, die vervolgens op een nader te specificeren domein en co-domein geplot werd. Toch hebben we het niet over deze machines als we praten over grafische rekenmachines. In het begin van de jaren negentig, toen de eerste experimenten door het Freudenthal instituut werden gedaan, werd het woord grafische rekenmachine geïntroduceerd. Men bedoelde hiermee een numerieke rekenmachine (in tegenstelling tot de HP28S die ook symbolische algebra aan kon) waarmee op een eenvoudige manier grafieken konden worden geplot en die betaalbaar was voor leerlingen. De eerste machine die zo genoemd werd was de TI-81 van Texas Instruments. Het was dan ook de eerste machine met grafische capaciteiten, die gericht was op gebruik in het onderwijs. De PB-700 en de HP28S waren meer gericht op geavanceerd gebruik. De laatste was eigenlijk voor ingenieurs ontworpen. Anno 1997 hebben echter alle drie de fabrikanten een 'grafische rekenmachine' die gericht is op gebruik in het voortgezet onderwijs. De machines waar we het dan over hebben zijn de Casio cfx-9850G, de TI-83 en de HP38G. De verschillen met de rekenmachines die nu in het voortgezet onderwijs worden gebruikt zijn onder andere:

- Ze hebben een geheugen waarin programma's of tekst kunnen worden vastgehouden in tegenstelling tot de registers die slechts een enkele waarde kunnen vasthouden;
- Ze zijn programmeerbaar;
- De display bestaat uit meerdere regels, zodat grafieken geplot kunnen worden;
- Het is mogelijk om een schets of plaatje te maken en te bewaren;
- Ze kunnen gegevens uitwisselen met elkaar en met de computer;
- Ze kunnen berekeningen uitvoeren met matrices en lijsten;
- Ze hebben een stapelgeheugen waarin eerdere berekeningen blijven staan, die eventueel opnieuw kunnen worden opgeroepen voor gebruik.

Kortom: een grafische rekenmachine is een rekenmachine aangevuld met een aantal eigenschappen van een computer.

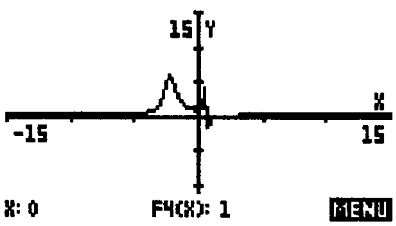
Het functieonderzoek

Er zijn een heleboel functies die nu kunnen worden gekozen. Ik kies hier voor een relatief eenvoudig ogende gebroken functie,

namelijk:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^3 + 4x^2 + 3x - 3}$$

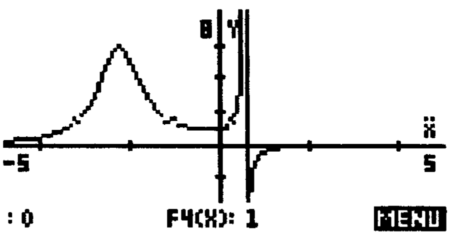
Ik stel me nu voor dat de gemiddelde vwo-leerling direct zijn grafische rekenmachine pakt, het functievoorschrift intypt en de grafiek plot. Dit levert dan bijvoorbeeld het volgende plaatje op (figuur 1).



figuur 1

De leerling zal vermoedelijk redeneren dat er een maximum en een minimum te zien zijn. Er is nog iets te zien, dat mogelijk een asymptoot is. Een logische stap voor de leerling is het plaatje wat verder uit te vergroten.

In figuur 1 loopt x van -15 tot 15. Als x-interval zal de leerling nu bijvoorbeeld [-5, 5] kiezen. Dat levert een duidelijker plaatje op (figuur 2).



figuur 2

Mijn denkbeeldige leerling zal nu waarschijnlijk concluderen: 'maximum, minimum, verticale asymptoot en de x-as als horizontale asymptoot'. De verleiding is vervolgens dan heel groot om naar die resultaten toe te rekenen.

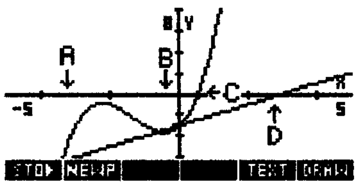
Bespreking van deze aanpak

De leerling zal het maximum en minimum numeriek moeten bepalen, omdat in de teller van de afgeleide een niet-triviale derdegraads vergelijking komt te staan. Het oplossen daarvan hoort niet tot het standaardgereedschap van de vwo-er. De vraag is nu of we dit numeriek bepalen in de toekomst zullen toelaten of niet. Een argument voor de computer en de grafische rekenmachine was dat realistische wiskunde en toepassingen nu binnen handbereik zouden komen. Het prijskaartje dat hieraan hangt is het in sommige gevallen slechts numeriek kunnen bepalen van extreme waarden en nulpunten. Het gevaar dat hierin schuilt is dat leerlingen blindelings gaan vertrouwen op het plaatje op hun rekenmachine, hetgeen in dit geval funest is. De derdegraadsvorm in de teller van de afgeleide heeft volgens het plaatje in ieder geval twee nulpunten. Er moet dus ook nog een derde zijn en dus moet er ook nog ergens een derde extreme waarde zijn. Als de leerling zich dit niet realiseert mist hij dus een extreme waarde. Als de leerling zich dit wel realiseert, is de vraag wat hij zal doen. De kans is groot dat hij zal gaan uitzoomen op de x-as, hetgeen geen oplossing oplevert.
Waar ik vervolgens bang voor ben, is dat er leerlingen zullen zijn, die gaan twijfelen aan de verticale asymptoot en rond deze asymptoot gaan zoeken naar een extreme waarde. Dat dit niet denkbeeldig is mag blijken uit het feit dat de cfx-9850G bij het zoeken naar maxima op het interval [–5, 5] tevens de verticale asymptoot selecteerde als plaats van een maximum:
$x = 0{,}546\,818\ldots\ldots$,
$y = 7{,}11273\ldots\ldots$E10.
Ook de TI-83 ging hier de mist in. Afhankelijk van het gespecificeerde interval leverde de TI-83 een waarde af die in de buurt van de verticale asymptoot lag. Dit betekent dus dat een leerling die blijft proberen wel tien of meer maxima en minima weet te vinden in de buurt van de verticale asymptoot. De HP38G heeft een ander zoek-algoritme dat echter niet over een verticale asymptoot heenstapt. Dit betekent dat de derde extreme waarde op de HP38G alleen wordt gevonden als de cursor rechts van de asymptoot wordt gezet.

Nu zou je kunnen zeggen dat we, nadat onze leerlingen eenmaal zo'n fout hebben gemaakt, kunnen vertellen dat de grafische rekenmachine soms wel eens kuren heeft, omdat hij niet kan denken. Ik geloof echter niet in een dergelijke ad hoc oplossing. Als we dat doen dan leren we onze leerlingen 'omgaan met een specifieke grafische rekenmachine' in plaats van wiskunde. Immers als de leerling zijn wiskunde beheerst en de GR alleen maar als 'handig' hulpmiddel gebruikt dan kijkt hij wel door deze kuren heen. Daarnaast moeten we ons realiseren dat een dergelijk probleem ook pas naar voren kan komen op het eindexamen!

Alternatieve aanpak

Bij functies die het product of quotiënt van twee of meer functies zijn kan het nuttig zijn om iedere functie (in dit geval teller en noemer) apart te plotten en hiervan een aantal speciale punten te benoemen; namelijk de punten waar de functie een nulpunt heeft of waar de grafiek van de functie de grafiek van een andere functie snijdt. Deze aanpak zorgt ervoor dat er een aantal punten en intervallen zijn (figuur 3) waarover de leerling iets kan zeggen met betrekking tot het gedrag van de te onderzoeken functie.



figuur 3

Dat teller en noemer een snijpunt hebben (A) is duidelijk. Waarschijnlijk zelfs nog een tweede (B) en misschien ook nog wel een derde (B1 en B2). De leerling kan dit onderzoeken met behulp van de optie ‘Intersection’ op de GR.
Er blijken drie snijpunten te zijn, zodat we vijf punten en zes intervallen krijgen waarover de leerling uitspraken moet doen met betrekking tot de te onderzoeken functie. Twee punten en een interval wil ik hier kort bespreken.
Bij punt C is de noemer gelijk aan nul en de teller niet, zodat we daar dus wel degelijk een verticale asymptoot hebben.
Bij punt D is de teller gelijk aan nul, zodat de functie hier een nulpunt heeft.
Op het interval rechts van punt D zijn teller en noemer beide positief, echter de noemer is veel groter en stijgt sneller dan de teller, dus zal de functiewaarde voor hele grote waarden van x willekeurig dicht bij nul gebracht kunnen worden. Slordig gezegd: er is nog een nulpunt voor x is oneindig. Dit zou echter betekenen dat er nog een extreme waarde tussen deze nulpunten zit. Helaas is dat ene nulpunt geen echt nulpunt dus zullen we ons vermoeden op een andere manier moeten bewijzen en dat kan als volgt.
Ik zoek twee punten op het interval rechts van D met dezelfde functiewaarde en concludeer vervolgens hetzelfde over het extreem.

- Ik weet dat $f(3) = 0$, ik kies nu een punt dat hier dichtbij ligt. Met $x = 3{,}01$ vind ik $f(3{,}01) = 0{,}000144$.
- De volgende stap is een punt zoeken met een functiewaarde die kleiner is dan 0,000144. Bijvoorbeeld $f(100) = 0{,}\ 000\ 093$ voldoet hieraan.
- Volgens de tussenwaardestelling moet er nu op het interval $[3\ ;\ 3{,}01]$ een punt P zijn met $f(P) = f(100)$.
- Vervolgens toon ik aan met de middelwaardestelling dat er een punt op het interval $[P\ ;\ 100]$ is waar de raaklijn evenwijdig is aan de koorde tussen de punten $(P\ ;\ 0{,}000093)$ en $(100\ ;\ 0{,}000093)$ ofwel waar de raaklijn evenwijdig is aan de x-as. De functie heeft daar dus een extreme waarde.

Merk op dat voor het aantonen van deze extreme waarde de functie niet gedifferentieerd hoeft te worden en dat ook geen derdegraads vergelijking hoeft te worden opgelost. Met een numerieke benadering kunnen we in dit geval tevreden zijn. Helaas moet hier weer gereedschap gebruikt worden (middelwaardestelling, tussenwaardestelling), dat niet in de ‘kist’ van de vwo-er zit. In dit geval zijn het echter stellingen die te maken hebben met de continuïteit van een functie en die intuïtief goed te begrijpen zijn voor leerlingen (de bewijzen komen op de universiteit wel).

Reactie

Het zou op zich een interessant experiment zijn als docenten, die op hun school al werken met grafische rekenmachines hun klas het bovengenoemde functieonderzoek eens lieten uitvoeren. Vertel de leerlingen dat dit een simulatie van een examen voorstelt waarbij zij een functieonderzoek moeten uitvoeren, maar in tegenstelling tot de huidige situatie daar een grafische rekenmachine bij mogen gebruiken. Het doel is uitvinden of leerlingen hun GR op een goede wijze kunnen gebruiken bij het functieonderzoek. Als een leerling tijdens dit ‘examen’ een vraag stelt over hoe iets gedaan moet worden, dan zegt u dat u leraar Duits bent en helaas geen verstand van wiskunde heeft, maar dat u er op vertrouwt dat de betreffende leerling dit naar eigen inzicht wel op een juiste wijze zal weten aan te pakken. Het gemaakte werk (bij voorkeur) of een samenvatting kunt u naar de redactie van Euclides sturen. Op deze wijze hopen we een uitspraak te kunnen doen over het gedrag van leerlingen met een GR; laat hij zich leiden door het plaatje of door zijn wiskundige kennis? Als een te hoog percentage leerlingen niet in staat is om de derde extreme waarde te lokaliseren, dan moet wellicht structureel aandacht worden besteed aan de factorstelling en de hoofdstelling van de algebra en zullen leerlingen tijdig getraind moeten worden in een goede aanpak.

π en de Fibonaccigetallen

De getallen van Fibonacci worden door de volgende eenvoudige betrekking gedefinieerd:
$F_0 = 0$
$F_1 = 1$
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n > 1)$

Deze betrekking levert de volgende getallenrij op:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …
In de figuur is een rechthoek getekend met twee opeenvolgende Fibonaccigetallen als zijden.
Uit de figuur zien we onmiddellijk dat
$AB = BC$.
Als we ΔOBC draaien om B over een hoek van 90° gaat deze over in ΔDBA waaruit volgt dat $\angle ABC = 90°$.
Dus geldt $\alpha - \beta = \gamma + \delta = 45°$
We vinden zo:

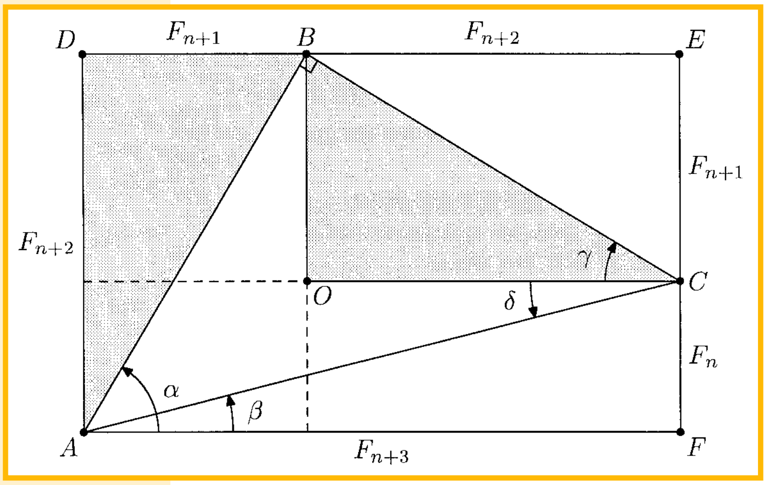
$$\alpha - \beta = \pi/4 = \arctan \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \arctan \frac{F_n}{F_{n+3}} \quad (1)$$

$$\gamma + \delta = \pi/4 = \arctan \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} + \arctan \frac{F_n}{F_{n+3}} \quad (2)$$

Waaruit dan onder andere de volgende relaties kunnen worden afgeleid:

$\pi\backslash 4 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$
$\pi\backslash 4 = \arctan \frac{2}{3} + \arctan \frac{1}{5}$
$\pi\backslash 4 = \arctan \frac{3}{5} + \arctan \frac{2}{8}$
$\pi\backslash 4 = \arctan \frac{5}{8} + \arctan \frac{3}{13}$
$\pi\backslash 4 = \arctan \frac{2}{1} - \arctan \frac{1}{3}$
$\pi\backslash 4 = \arctan \frac{3}{2} - \arctan \frac{1}{5}$
$\pi\backslash 4 = \arctan \frac{5}{3} - \arctan \frac{2}{8}$
$\pi\backslash 4 = \arctan \frac{8}{5} - \arctan \frac{3}{13}$

Rob Bosch



Literatuur

Vadja **Fibonacci and Lucas numbers**
Borwein **Pi: a source book**

Verschenen

Hans Magnus Enzensberger
De telduivel
Een hoofdkussenboek voor iedereen die bang voor wiskunde is
De Bezige Bij, Amsterdam
263 blz.
ISBN 90 234 8149 6

Hans Magnus Enzensberger laat via twaalf dromen van het jongetje Robert allerlei wiskunde op een hele leuke manier aan bod komen.
Robert krijgt elke nacht bezoek van de Telduivel en in dialoogvorm worden uiteenlopende wiskundige begrippen aan de orde gesteld.
Zoals bijvoorbeeld 5 wamm! (5 faculteit) en huppen (machtsverheffen).
Een leuke inspiratiebron voor de onderbouw.

Jaarvergadering en studiedag 1997

Bram van der Wal

De start van de studiedag in Bilthoven riep herinneringen op aan de roman ‘De wereld gaat aan vlijt ten onder’ van Max Dendermonde. Zoals medewerkers van de professor bij Dendermonde onder grote spanning bezig waren voorbereidingen te treffen om hun meester elektronisch over te seinen, zo was hier Nellie Verhoef, organisator van de studiedag, hartstochtelijk bezig het grote apparaat op het podium te laden en verbindingen te maken teneinde de Power Point tot ontlading te brengen. Op de studiedag ging het om de projectie van het dagprogramma op het scherm.

Evenals in de roman was ook hier de poging om iets groots te verrichten zeker niet onaardig om aan te zien.

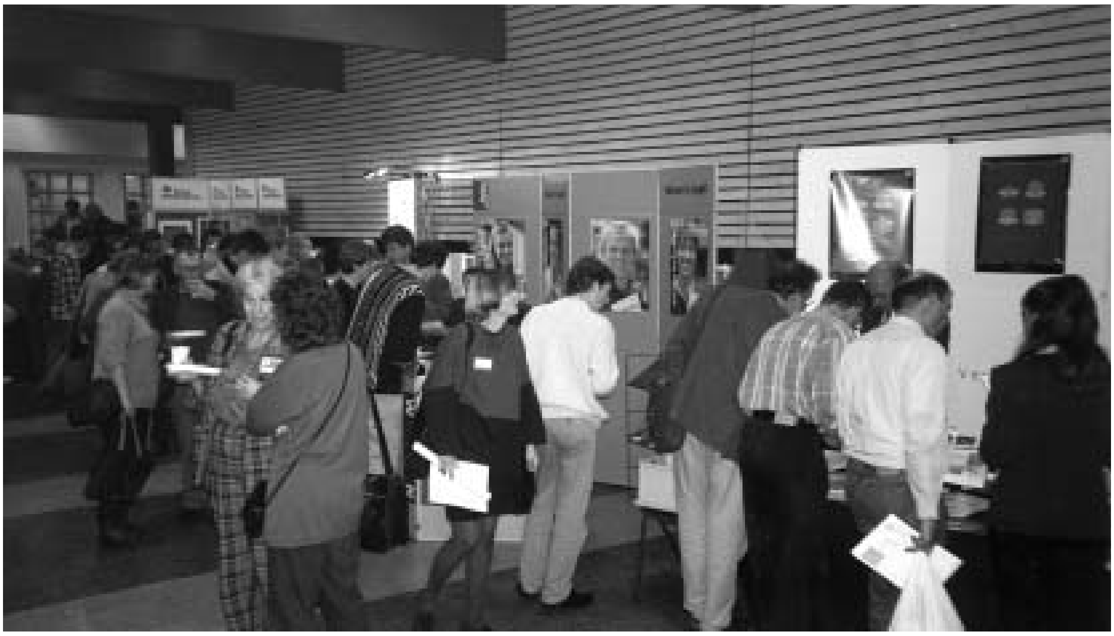
Zo was de hele studiedag in combinatie met de jaarvergadering de moeite waard en zeker niet saai, ook al gaf de omgeving van de school in Bilthoven er die dag alle reden toe. Fijne mist en nevel, gecombineerd met donkerrode vallende bladeren, vergezelden de deelnemers bij binnenkomst.
De thuisblijvers - gezien de grote belangstelling waren het er niet veel - hebben veel gemist. In de kantine en aanpalende ruimten van de school gonsde het van bedrijvigheid. De markt voor rekenmachines, software, boeken en hulpmiddelen wordt elk jaar uitgebreider en dat maakt de dag interessanter.
Er lijkt slechts één conclusie mogelijk: ons vak is springlevend.



Nellie Verhoef aan het begin van de studiedag.

Jaarrede

De voorzitter, Hans van Lint, opende de studiedag met een verwijzing naar onze grote meester Pythagoras die zich voor mondelinge overdracht van kennis uitsprak en een wantrouwen had tegen alles wat geschreven was. Van Lint bleef in het spoor van deze filosoof door op te merken belang te hechten aan het gesproken woord, ook in een tijd waarin sprake is van minder contacturen. De jaarrede kende nauwelijks dissonanten. Slechts eenmaal liet Van Lint iets van irritatie merken. Dat was op het moment dat hij sprak over de aanbeveling van de CEVO om de symbolische rekenmachine toe te staan. De suggestie dat de vereniging dit wil tegenhouden sprak hij met klem tegen; slechts de didactische



De markt werd druk bezocht.





mogelijkheden moeten eerst onderzocht worden. Een werkgroepje van de vereniging zal zich daarmee bezig houden.
De voorzitter keek tevreden terug op de eerste ronde van de vernieuwde examens vbo/mavo die, hoewel sterk afwijkend van voorgaande jaren, goed waren gemaakt. 'Wellicht heeft



De zaal was weer vol.

de special van Euclides mede bijgedragen aan het goede resultaat', droomde Van Lint met open ogen.

Een door de HES uit Rotterdam uitgevoerd onderzoek betreffende het functioneren van de vereniging mondde uit in een aantal aanbevelingen. De vereniging zou in de toekomst meer service-gericht moeten werken en de organisatie kan professioneler.

Erelid

Een grote verrassing was er voor Martin Kindt. Bestuurslid in het verleden, opsteller van vele wiskundige artikelen, leider van workshops; kortom de vele bijdragen van hem aan de vereniging vonden hun bekroning in het erelidmaatschap ervan. In zijn korte toespraakje voerde de heer Kindt de terugtredende leraar ten tonele: 'Ik hoop niet dat we in de toekomst de vereniging van terugtredende leraren zijn'.

Wie bewijst heeft wat

De plenaire lezing in de morgenuren werd verzorgd door professor Dirk van Dalen. Zijn betoog over bewijzen als het kenmerk van wiskunde was theater van het zuiverste water.
Alsof hem gevraagd was zich te manifesteren als de bekende verstrooide professor verloor hij tijdens zijn betoog herhaaldelijk zijn microfoon, wist die niet zonder hulp van buiten weer te bevestigen, was sheets voor de overheadprojector vergeten, bewoog zich als dolende van hot naar haar over het geïmproviseerde podium, kortom was een parodie op zichzelf. Hetzelfde gold voor de inhoud van zijn betoog. Er is een tijd geweest - met de nadruk op geweest - dat bewijzen in het voortgezet onderwijs ongeveer ging zoals de professor op zijn sheets uitschreef.
Zijn college over het bewijs dat 2 + 3 = 5 zal weinigen inspireren daar in de klas iets mee te doen. Ook een aannemelijk bewijs uit de vlakke meetkunde, waar van een verkeerde figuur wordt uitgegaan, maakte niet al te veel indruk.
Slechts de opmerking dat het gegeven en hetgeen bewezen moet worden niet te ver uit elkaar mogen liggen was een nuttige tip. Maar waarschijnlijk wist menige docent dat al.
Zijn gevoel voor humor en timing bleken aan het eind van zijn lezing toen diverse organisatoren hem



Peter van Wijk in actie.

discreet wezen op het gevorderde uur en hij zeer puntig binnen enkele seconden en met een kwinkslag afrondde.
De voorzitter had nog de tegenwoordigheid van geest op te merken dat het bewijs vandaag de dag in onderzoeksopdrachten een kans krijgt.

Computergebruik

Van geheel andere orde was de plenaire lezing in de middaguren door Peter van Wijk over het gebruik van ICT in de klas. Op een bewonderenswaardige wijze gaf hij in korte tijd een overzicht van het computergebruik in de klas, somde velerlei software voor de diverse schooltypen op en gaf tips hoe die te gebruiken. Ondertussen wees hij steeds naar dezelfde hoek van de zaal waar na afloop een aantal stencils konden worden opgehaald met uiterst bruikbaar materiaal voor computergebruik in de klas. De belangstelling ervoor was overweldigend. Aldus zorgde Peter voor de klapper van de dag.



De middaglezing door Peter van Wijk.

Tussen deze lezingen door was er een keur van workshops waarin voor elke aanwezige wel iets te vinden was. De aansluiting vbo/mavo op het middelbaar beroepsonderwijs, de ervaringen van netwerkscholen in het kader van het studiehuis en de veranderingen in de propedeusepraktijk van het hoger beroepsonderwijs stonden centraal.

Het thema van de dag ‘Veranderingen: b(l)oeiend?!’ leverde door de grote afwisseling en de grondige voorbereiding een b(l)oeiende studiedag op.





Martin Kindt aan het woord.







Professor Dirk van Dalen houdt
een betoog over bewijzen.



Na een b(l)oeiende studiedag
werd de thuisreis aanvaard.

Worteltrekken in (Indo-)Arabische cijfers

Johan Derks

Inleiding

De meeste van onze cijfermethoden waren al bekend aan de Arabieren[1] van de tiende eeuw. Dankzij het van de Indiërs afkomstige positiesysteem met nulnotatie konden zij zich ontwikkelen tot goede rekenmeesters. De rekenkunst maakte een grote sprong voorwaarts met de verbreiding van de Indo-Arabische cijfers. Deze werden in Europa pas in de dertiende eeuw, vooral door de vertaling van Al-Chwârizmî's boek 'Over optellen en aftrekken volgens de Indiërs', op grotere schaal bekend en vervingen daar geleidelijk de Griekse cijfers.[2]
In Nederland waren in de zestiende eeuw zo'n dertig boekjes met opgaven in omloop, bedoeld om het publiek vertrouwd te maken met rekenen in Indo-Arabische cijfers. De algebraïsche bewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en worteltrekken werden er aanzienlijk door vereenvoudigd.
Het **noteren** en **herkennen** van getallen werd eenvoudiger, doordat men nog maar met 10 tekens te maken had in plaats van met de 27 tekens van het Ionisch-Griekse alfabet. Stelt u zich voor: de vermenigvuldiging $4 \times 222 = 888$ werd in Griekse cijfers geschreven als

$$\delta \times \sigma\kappa\beta = \omega\pi\eta$$

Het **rekenen** werd veel eenvoudiger dank zij het positiesysteem.

Het positiesysteem

Waarschijnlijk is de Arabische rekenkunde tot grote bloei gekomen dankzij de voordelen van het positiesysteem. De Arabieren hadden de nieuwe cijfers geleerd van de Indiërs, door tussenkomst van de Perzen. Daarbij speelde de Arabische filosoof Al-Kindi, geboren in 801, een belangrijke rol. Hij schreef een aantal werkjes over rekenkunde, waaronder één over het gebruik van Indische cijfers.
Overigens was het Indische systeem al vóór 662 in Syrië bekend, maar het duurde eeuwen voordat het algemeen door het Oosters en Westers Kalifaat werd overgenomen. Daar waren verschillende redenen voor:

1. Het Indische systeem verbreidde zich via handelaren, die de cijfers met een stift of met de vingers in het zand van een zandbord schreven. De hogere kringen keken neer op dat gebruik.
2. De Indische cijfers werden van links naar rechts geschreven, in tegenstelling tot het Arabische schrift.
3. De Arabische wetten maakten voor cijfers gebruik van lettertekens volgens hun plaats in het Arabische alfabet in de oorspronkelijke volgorde.

Ook de gewoonte om de noemer van een breuk onder de teller te schrijven, is overigens afkomstig van de Indiërs.

Worteltrekken volgens Al-Uqlīdisī's benadering

Omstreeks 955 verschijnt in Damascus het oudste nu nog beschikbare Arabische rekenboek: 'Kitāb al-Fuṣūl fī al-Hisāb al-Hindī' (Boek van hoofdstukken over het Indische rekenen). Het is geschreven door Abū al Ḥassan, Aḥmad Ibn Ibrāhim, bijgenaamd Al-Uqlīdisī.[3]
Daarin geeft hij een lange reeks van voorbeelden van bewerkingen, onder andere ook van worteltrekken. Hij onderscheidt wortels van vierkantsgetallen en van niet-vierkantsgetallen.
Om de wortel uit een vierkantsgetal te trekken gebruikt Al-Uqlīdisī ongeveer de staartworteltrekking, die sommigen van u misschien uit oude schoolboeken bekend is[4].

```
              66564
              6|65|64
  2    × 2 =  4
              ‾
  2  ←―――┘
  ‾
  4.   × . =  2  65
  45   × 5 =  2  25
              ‾‾‾‾‾
   5 ←―――┘
  ‾‾
  50.  × . =     40  64
  508  × 8 =     40  64
                 ‾‾‾‾‾‾
                      0
```

Neem een getal *V*.
- Verdeel het van achter naar voren in groepjes van twee cijfers.
- Zoek het grootste kwadraat a^2 onder 6.
- Tel *a* links op bij de vermenigvuldiger.
- Trek rechts af en haal twee cijfers aan.
- Zoek de grootste *b* met $(20a + b) \times b \leq 265$.
- Tel *b* links op bij de vermenigvuldiger.
- Trek rechts af en haal twee cijfers aan.
- Zoek de grootste *c* met $(200a + 20b + c) \times c \leq 4064$
- Stop, als het verschil nul is of als u wilt afronden.

De uitkomst is $100a + 10b + c = 258$.

Het grootste getal, waaruit de schrijver 'door uitputting' (namelijk van alle cijfers) de wortel trekt is 1.640.736.039.
In Al-Uqlīdisī's boek komen geen letterformules en geen bewijzen in onze zin voor. Wel wordt af en toe een rechtvaardiging voor de methode gegeven. Meestal is deze inductief. Aparte hoofdstukken worden gewijd aan het testen van de uitkomsten.

Om de wortel uit een niet-vierkantsgetal *N* te trekken komen er in het boek drie verschillende methodes voor. Daarvan is voor ons de 'methode van de nullen' het meest vertrouwd. Die gaat als volgt.
U wilt $\sqrt{2}$ berekenen. Vermenigvuldig met 10 000. Trek de wortel uit 20 000. Dat is 141 (afgerond). Deel door 100. Uitkomst $1\frac{41}{100}$.
Omdat de Arabieren bij voorkeur de Babylonische zestigtallige breuken gebruikten, moest $\frac{41}{100}$ nog omgerekend worden in minuten en seconden.

> De wellicht oudste systematisch gebruikte methode om de wortel uit een niet-vierkantsgetal te trekken is de methode van Heron:
> Stel: u zoekt naar $\sqrt{2}$. Begin met een schatting, zeg $1\frac{1}{2}$. Dat is teveel: $1\frac{1}{2} > \sqrt{2}$, echter $2/1\frac{1}{2} < 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ dus $2/1\frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ is te weinig. Neem het gemiddelde van de overschatter en de onderschatter:
> $(1\frac{1}{2} + \frac{4}{3})/2 = \frac{17}{12}$. Dat is te veel, dus $2/(\frac{17}{12})$ is te weinig, enz.
> Mogelijk was deze methode al bij de Babyloniërs bekend.

Dus $\sqrt{2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{36}{3600}$ ofwel 1 'uur', 24 'minuten' en 36 'seconden'.
Met deze methode kon een willekeurig grote nauwkeurigheid bereikt worden. Immers door 2 met 10^{2n} te vermenigvuldigen en de wortel door 10^n te delen, kreeg je een nauwkeurigheid van 10^{-n}:

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N \cdot 10^{2k}}}{10^k}.$$

Methode 2: Als je toch de einduitkomst in het zestigtallig stelsel wilde hebben, lag het voor de hand met een even macht van 60 te vermenigvuldigen volgens het principe

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N \cdot 60^{2k}}}{60^k}.$$

In plaats van te vermenigvuldigen met een even macht van 10 of van 60 kon je natuurlijk ook met een ander vierkantsgetal vermenigvuldigen, bijvoorbeeld met $f^2 = 36$. Je krijgt dan

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N \cdot f^{2k}}}{f^k}.$$

Dit kwam vooral van pas als het getal waaruit de wortel getrokken moest worden, een breuk was met een factor van 36 in de noemer. Na het worteltrekken moest dan weer gedeeld worden door $f = 6$.
Dit zouden we als een aparte methode kunnen beschouwen.

Benadering met een Indische breuk

Als alle cijfers waren uitgeput en er bleef een rest over, dan kon alsnog overgeschakeld worden op de methode van de nullen of de machten van zestig om een grotere nauwkeurigheid te bereiken.
Soms laat Al-Uqlīdisī het antwoord met een macht van tien in de noemer staan: $\sqrt{712899} = 844\,\frac{33}{100}$.
Bij gebruik van tiendelige breuken kan – zoals bekend – de staartworteltrekking achter de komma voortgezet worden, maar tiendelige breuken waren nog niet ontdekt.
Wel was aan Muhammad Al-Chwârizmî (750-850) al bekend, dat na berekening van a met $a^2 < N < (a+1)^2$ een verdere benadering van $\sqrt{N}$ gegeven werd door $a + \frac{r}{2a}$, waarbij $r = N - a^2$ is.

Waarschijnlijk kwam dit resultaat voort uit de vraag, welke waarde van t zo goed mogelijk voldoet aan $(a + t)^2 = N$. Dat geeft namelijk

$t = \frac{r}{2a}$, met verwaarlozing van t^2.

Als we de methode van Heron (zie kader op vorige pagina) toepassen op a, dan vinden we als gemiddelde van

a en $\frac{N}{a} = a + \frac{r}{a}$ ook $a + \frac{r}{2a}$,

maar we hebben geen aanwijzingen, dat de Arabieren deze methode gebruikten.

De bepaling van $\frac{r}{2a}$ gold slechts als aanvulling op het worteltrekken nadat alle cijfers 'uitgeput' waren. De methode werd ook niet iteratief gebruikt. Al-Karkhî (? - 1024) en Al-UqlĪdisĪ geven daarnaast

$$\sqrt{N} = a + \frac{r}{2a+1}$$

Al-UqlĪdisĪ vermeldt bovendien, dat $\sqrt{N}$ inligt tussen

$\frac{r}{2a+1}$ en $\frac{r}{2a}$.

(Ergens adviseert hij daarom het harmonisch gemiddelde $\frac{2r}{4a+1}$ te nemen.)

Inderdaad is

$$a + \frac{r}{2a+1} < \sqrt{a^2 + r} < a + \frac{r}{2a} \text{ voor } \frac{r}{2a+1} < 1.$$

De voorwaarde $\frac{r}{2a+1} < 1$ is equivalent met $N < (a+1)^2$. De drieledige ongelijkheid volgt uit de wortel van:

$$a^2 + r - \frac{r}{2a+1} + \frac{r^2}{(2a+1)^2} < a^2 + r < a^2 + r + \frac{r^2}{4a^2}.$$

Kushyār (971-1029) en Al-NasawĪ (begin 11e eeuw) verbeteren en verklaren sommige methoden van Al-UqlĪdisĪ . Zo legt Al-NasawĪ uit, dat de benadering

$$\sqrt{N} \approx a + \frac{r}{2a+1}$$

het resultaat is van interpolatie van het nulpunt van $N - x^2$ tussen de functiewaarden voor $x = a$ en $x = a + 1$ [5].

De Arabieren zijn niet de eersten, die tiendelige breuken gebruiken. De Chinees Liu Hui, derde eeuw na Chr., mag beschouwd worden als de eerste uitvinder. Deze uitvinding vloeide voort uit de omstandigheid, dat het Chinese meetsysteem tientallig was en Chinese telstokken sinds de tweede eeuw vóór Christus tientallig waren.

Tiendelige breuken

Daar in al deze berekeningen het decimale stelsel gebruikt wordt en benaderingen tot kleiner dan 1 nagestreefd worden, komt men soms zeer dicht bij het idee van decimale breuken. Zo schrijft UqlĪdisĪ bij het bepalen van $\sqrt{50}$ onder toevoeging van vier nullen ergens 'Het is zeven en zeven van de 100.'
Op een andere plaats wil hij herhaald $\frac{9}{10}$ van een getal nemen. Hij neemt 13, maakt daar 130 tienden van en trekt er 13 vanaf. Zo krijgt hij 1170 tienden van tienden en berekent 1170 - 117 = 1053 tienden van tienden.
Elders gebruikt hij uitdrukkelijk een decimaalteken: ' , namelijk

1 bij het halveren van oneven getallen. Hij noemt drie methoden daarvoor:
   - Indische breuken, zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$
   - Babylonische breuken, zoals 30', 15', 22'30''
   - tienden, voorafgegaan door het decimaalteken, zoals '5, '25, '375. Als voorbeeld halveert hij 19 vijf keer en verkrijgt '59375. Ook komt voor $13 : 2^4 = 0{,}8125$.
2 bij het berekenen van samengestelde groei met één tiende. Als voorbeeld berekent hij $135 \times 1{,}10^5 =$ 217'41885.

Na Al-UqlĪdisĪ kwamen schrijvers als Kushyār, Al-NasawĪ en Al-Samaw'al, die gebruik maakten van coëfficiënten van machten van 10.
De eerste die het idee van decimale breuken verder ontwikkelt, is Al-KāsjĪ. Deze voert ook vermenigvuldigingen uit, zoals 14,3 × 25,07 door 143 met 2507 te vermenigvuldigen en het product te delen door 1000. Soms schrijft hij het tiendelige gedeelte in een andere kleur of gebruikt de aanduiding 'eerste tienden', 'tweede tienden' enz. Hij gebruikt ook een tabel met kolommen voor elke macht.

Terwijl Al-Uqlīdisī een enkele keer schijnbaar toevallig een decimale breuk gebruikt, geeft Al-Kāsjī zijn methode bijzondere nadruk als alternatief voor zestigtallige breuken en noemt deze: al-Kusūr al-a 'shāriyya.

Noten

1 Onder 'Arabieren' worden verstaan alle volken, die in het Arabische rijk woonden en het Arabisch als voornaamste cultuurtaal gebruikten.

2 Het gebruik van het telbord met het positiesysteem, maar zonder teken voor nul, werd al bekend dankzij de later tot paus Silvester II gekozen Gerbert d'Aurillac.

3 Het is mogelijk, dat de Arabieren deze methode zelf ontdekt hebben. Maar waarschijnlijk was hij ook eind vierde eeuw al bekend aan Theon van Alexandrië. Misschien kende Ptolemaeus (ca. 150 na Chr.) de methode ook.

4 Al-Uqlīdisī betekent 'Euclidiër' en duidt er waarschijnlijk op, dat de man in zijn levensonderhoud voorzag door kopieën van 'De Elementen' van Euclides te maken en die te verkopen. Verder is ons van zijn leven niets bekend.

5 Een oude Indische methode voor het benaderen van het nulpunt is de regula falsi ('dubbele-fout-regel', hisab al-Khataayn). Als twee waarden van x in de buurt van het nulpunt van $f(x)$ bekend zijn: $f(x_1) = \epsilon_1$, $f(x_2) = \epsilon_2$, kan een betere benadering gevonden worden met de formule:

$$x_3 = \frac{x_2\epsilon_1 - x_1\epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2}$$

In dit geval is $f(a) = N - a^2 = r$ en
$f(a+1) = N - (a+1)^2 = r - (2a+1)$.

Literatuur

Morris Kline
Mathematical Thought from Ancient to Modern Times
New York Oxford U.P., 1972
ISBN 77-170263

A. Dahan-Dalmedico en J. Peiffer
Une histoire des mathématiques, Routes et dédales
Éd. du Seuil, 1986
ISBN 2-02-009138-0, 1e uitgave: 2-7310-4112-9

Dirk J. Struik
A Concise History of Mathematics
London, G. Bel and Sons, 1959
(Dover Publ. USA)
(Geschiedenis van de wiskunde, uitgebreide heruitgave, Nijmegen SUN, 1980)

R. Rashed
Encyclopedia of the History of Arabic Science
Routledge USA, 1996

A.S. Saidan
The Arithmetic of Al-Uqlīdisī
D. Reidel Publ. Cy. Dordrecht, 1978

bespreking

Henk J.M. Bos
Lectures in the history of mathematics
Deel 7 van de serie ‘History of mathematics’ van de ‘American Mathematical Society’, 1993
ISBN 0-8218-9001-8
prijs: $ 86,–

Het boek bevat, zoals de titel al aangeeft, een verzameling van elf lezingen van de hand van één auteur. De op zichzelf staande verhalen zijn in een tijdsbestek van achttien jaren gehouden. Toch is er een duidelijke lijn in het gehele boek terug te vinden. In de inleiding van dit boek staat dat de hoofdstukken los van elkaar en in elke willekeurige volgorde gelezen kunnen worden. Dat is waar, maar de gekozen volgorde is niet toevallig. Zo staat de eerste lezing heel duidelijk in verband met de laatste.

De eerste twee lezingen zijn presentaties van onderzoek van de auteur met daarin een sterke nadruk op het algemene belang van de geschiedenis van de wiskunde.

De lezingen drie tot en met acht gaan elk over een specifiek onderwerp van de wiskunde uit de zeventiende tot en met de negentiende eeuw.

De laatste drie lezingen plaatsen wiskunde in een historisch perspectief.
Overigens zijn de lezingen één en elf eerder in Euclides 63 en 65 verschenen.

In de eerste lezing (zijn inaugurele rede) betoogt Bos dat herkenning en verwondering de onmiskenbare motivaties zijn voor interesse in het verleden. Aan de hand van twee voorbeelden maakt hij dat duidelijk. Het éne voorbeeld betreft een kleitablet van 1750 v. Chr., die rekenmethoden laat zien zoals onze abc-formule (de herkenning). Het andere voorbeeld gaat over de voor ons onlogische redeneringen van Poncelet. Die redeneringen brachten Poncelet in 1812 overigens wel tot voor ons nog steeds zeer bruikbare gevolgtrekkingen (de verwondering, openstaan voor het mirakel). Aan de hand van voorbeelden uit zijn eigen onderzoek laat hij ook hier weer zien dat er sprake kan zijn van verwondering en herkenning. De auteur maakt de lezer hier duidelijk dat geschiedenis van de wiskunde meer is dan alleen het opsommen van de wiskundige vondsten uit het verleden.

De tweede lezing handelt over de representatie van krommen in de zeventiende eeuw. Aan de hand van voorbeelden wordt duidelijk gemaakt hoe men in die tijd de verschillende soorten krommen systematiseerde en beschreef. Ook hier blijkt dat de benaderingswijze toen een andere was dan de onze nu. Het is maar net wat je gewend bent.

In de derde tot en met de zesde lezing wordt verteld over werk en betekenis van Descartes, Christiaan Huygens, Leibniz en Bernoulli. Weer laat de auteur zien dat er elementen van herkenning en verwondering in te vinden zijn. Zo heeft Descartes vastgesteld dat krommen een vergelijking hebben en omgekeerd dat bij een vergelijking met twee onbekenden een kromme hoort. En construeren was geen praktische activiteit maar een denkproces. Zo zie je bij Huygens in zijn benadering van het slingeruurwerk al een begin van de infinitesimaalrekening. En zo lijken de differentialen van Leibniz **wel** en tegelijkertijd **niet** op de ons nu bekende begrippen.

De zevende lezing gaat over de integraal- en differentiaalrekening in de achttiende eeuw en de rol van de toepassingen. De auteur laat zien dat de toepassingen in die tijd en de daarbij behorende wiskunde hand in hand gingen. De bedenker van de toepassing was tevens de wiskundige. Hier werd bij de toepassing dus niet echt een discipline-grens overschreden. Eerst na het ontstaan van het puur wiskundige begrip functie ontstond er een onderscheid tussen de verschillende disciplines zoals bijvoorbeeld mechanica en wiskunde. Bij de toepassingen die daarna ontstaan is er echt sprake van het overschrijden van de grenzen van de ene discipline naar de andere. Wiskunde werd een te onderwijzen vak, want men zag het nut er van in voor de toepassing door ingenieurs.

De achtste lezing laat zien dat één probleem uit de wiskunde, het sluitingsprobleem van Poncelet, door wiskundigen uit verschillende perioden op volstrekt andere manieren is benaderd en opgelost. Deze drie bewijzen geven het onderscheid in stijl van wiskundig denken in de tijd weer.

Lezing nummer negen behandelt de ‘elementen’ van de wiskunde.
Hier worden drie hoofdwerken uit de wiskunde behandeld:
- De elementen van Euclides - 300 v. Chr.
- Universele elementen van Christiaan Wolff - 1730
- Éléments de mathématique van Bourbaki - in publicatie sinds 1939.

Deze bespreking maakt in ieder geval heel erg duidelijk dat wat we onder de elementen van de wiskunde verstaan zeer tijdgebonden is.

In de tiende lezing wordt de dubbelrol van wiskunde als koningin en dienaar van de wetenschap beschre-

ven. Aan de hand van vier toepassingsgebieden wordt de dienende rol van de wiskunde aangetoond. Daarna volgt een beschrijving van de wiskunde als koningin van de wetenschap. De auteur benadrukt hier dat dit idee meer op visies is gebaseerd dan op zekerheden. Hij noemt als voorbeeld het idee van Newton dat de wetenschap moet zoeken naar natuurwetenschappelijke wetten die de vorm van een wiskundige formule hebben. Alhoewel deze visie z'n nut heeft bewezen, zou deze voor sociale wetenschappen weinig opleveren. Kortom ook hier bewijst de geschiedenis dat de ideologische bijbetekenissen die uit wiskundige begrippen voortkomen niet absoluut zijn.

De laatste lezing handelt over de sociale context van wiskunde. Hier worden aan de hand van een verzonnen dialoog in de leraarskamer alle mogelijke vragen over het nut van wiskunde nu en in het verleden aan de orde gesteld. De schrijver zelf figureert als bezoeker en wiskundig-historicus in die discussie. Hij haalt verschillende onderwerpen en ideeën uit de geschiedenis van de wiskunde aan. De conclusie is onder meer dat het niet gaat om het beantwoorden van allerlei vragen maar om het bezig zijn met het zoeken naar die antwoorden. Het stellen en bediscussiëren van die vragen is inspirerend en helpt een verband te leggen met de sociale functie van wiskunde.

De cirkel is hiermee rond. Want waar de auteur in de eerste lezing sprak over de noodzakelijke elementen voor historische interesse heeft hij hier, door de discussie over het nut van wiskunde te ondersteunen met behulp van de geschiedenis van de wiskunde, het nut en dus het voldoende zijn aangetoond. Wiskundiger kan het niet.

Mijn conclusie is dan ook dat Bos een aantal lezingen bij elkaar heeft gezet waar je als docent wiskunde niet omheen kunt. Maar behalve aan docenten denk ik hierbij ook aan de leerlingen. Het voortgezet onderwijs staat voor een nieuwe periode: de tweede fase met doorstroomprofielen en studiehuis. In die nieuwe tweede fase is het voor leerlingen mogelijk om keuzeonderwerpen in de leerstof op te nemen. Ook is het de bedoeling dat leerlingen verder leren kijken dan de grenzen van de gangbare middelbare-schoolvakken. Dit boek biedt wellicht de mogelijkheid om bezig te zijn met: wiskunde, geschiedenis, filosofie en Engels. Een kans lijkt me.

Gerdien Visser

HKRWO symposium 1998

Het vierde symposium van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs (HKRWO) heeft als onderwerp:

LEREN DOOR DOEN
Historische reflecties op het activiteitsprincipe in het reken- en wiskundeonderwijs

30 mei 1998, Hogeschool Domstad te Utrecht, 10.15 - 16.00 uur

Tekenen en construeren, leren door doen dat blijft
De metamorfose van 75 jaar meetkundige activiteiten in de hoogste (16-18 jaar) klassen van de Vrije School
Annemieke Zwart, Hogeschool Helicon, Zeist

De menschen worden Meetkunstenaars geboren
De Maatschappij tot Nut van 't Algemeen en de wiskundedidactiek in de eerste helft van de 19-de eeuw
Danny Beckers, Katholieke Universiteit, Nijmegen

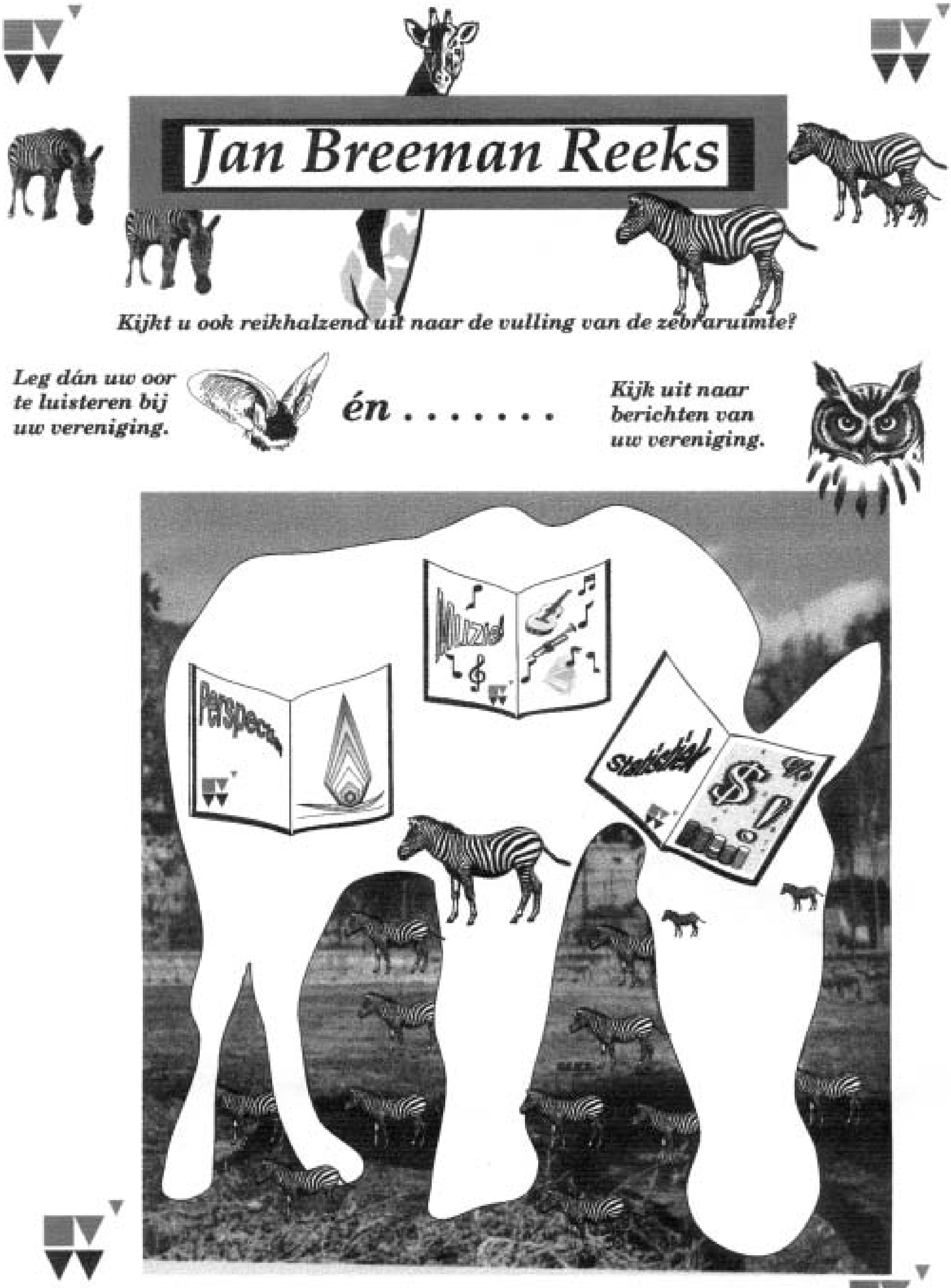
Friedrich Fröbel, uitvinder van het speel-leermateriaal
Ed de Moor, Freudenthal instituut, Utrecht

Concepten van zelfwerkzaamheid vanuit de pedagogische Reformbeweging
Prof. Britta Rang, Goethe Universität, Frankfurt

Posterpresentatie
Iedere deelnemer kan een poster over een historisch-didactisch onderwerp presenteren

Deelname door overmaking van ƒ 35,- op giro 4657326 tnv HKRWO te Amsterdam (koffie, thee en lunch inbegrepen)

Inlichtingen bij E. de Moor (020-6121382)


Jan Breeman Reeks
Kijkt u ook reikhalzend uit naar de vulling van de zebraruimte?
Leg dán uw oor te luisteren bij uw vereniging.
én . . . .
Kijk uit naar berichten van uw vereniging.
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel



Geef de zebra een zetje

Deze oproep is gericht aan alle docenten van VO, HBO en WO en wiskundige specialisten.

In het nieuwe wiskundeprogramma van het vwo is ruimte gemaakt voor de zogenaamde ZEBRA-blokken. Leerlingen hebben dan 40 uur de tijd om zich (grotendeels zelfstandig) te wijden aan een of meerdere onderwerpen van eigen keuze. Die onderwerpen moeten er dan natuurlijk zijn, en ze moeten aantrekkelijk zijn. Dat biedt een prachtige mogelijkheid om buiten de verplichte schoolwiskunde te stappen en een breder perspectief te schetsen van de wiskunde in de wereld. Een uitgelezen kans om iets te doen aan het imago van ons vak.
En dat gaat ons allemaal aan.

Een prima gelegenheid dus ook om enige samenwerking tussen het voortgezet onderwijs en het vervolgonderwijs tot stand te brengen. De laatste decennia is hieraan ons inziens onvoldoende aandacht besteed. Wij menen dat als een Universiteit of Hogeschool kans ziet een aantal uitgebalanceerde Zebra-boekjes te vervaardigen, dat een aanmerkelijk hogere intrinsieke reclamewaarde heeft dan een flitsende voorlichtingsdag. Reclamewaarde, niet alleen voor het vak wiskunde, maar ook voor de betreffende Universiteit!

De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft het initiatief genomen om de uitgave van deze boekjes te stimuleren en te coördineren, in samenwerking met uitgeverij Epsilon. We willen deze boekjes uitbrengen onder de naam Jan Breemanreeks, als hommage aan ons veel te vroeg overleden bestuurslid Jan Breeman, geestelijk vader van de zebra.
Een ambitieus project: we denken aan zo'n 5 of 6 boekjes per jaar over een hopelijk lange reeks van jaren. Maar een project waarin we geloven.
En geloven doe je bij voorkeur niet alleen, vandaar deze oproep om medestanders teneinde deze reeks ook concreet gestalte te geven.
U voelt het al: we zijn op zoek naar auteurs. Wie gaan deze boekjes schrijven? We zijn ervan overtuigd dat zowel in vo, hbo, wo als daarbuiten enthousiaste en capabele mensen te vinden zijn die dergelijke boekjes (met een studielast van circa 20 uur per boekje, een handzame omvang) kunnen schrijven.
Om zowel de wiskunde als de verankering in de schoolpraktijk op het juiste niveau (bovenbouw vwo) te waarborgen denken we aan auteursduo's: een expert op het betreffende onderwerp en een expert op het gebied van het voortgezet onderwijs (docent v.o.).

Voelt u zich aangesproken?
Als u er wel wat voor voelt om (mede)auteur te worden van een boekje uit de Jan Breemanreeks meldt u dan aan bij de NVvW, adres hieronder.
De Vereniging zal zonodig helpen bij het zoeken naar een partner en een onderwerp. Er zijn richtlijnen voor auteurs en er is een redactie beschikbaar voor advies.

Dit is de kans om die leuke ideeën die u altijd al had eens op papier te zetten of om eindelijk eens mee te werken aan een echt boekje, dat ook nog in de boekhandel komt te liggen. We denken namelijk dat deze boekjes in principe interessant kunnen zijn voor een veel breder publiek dan alleen de vwo-leerlingen en hun docenten.
Doen, het wordt vast leuk!

Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

Jaarrede 1997*

In de tijd van Pythagoras werd kennis in hoofdzaak mondeling overgebracht. In zekere zin was er zelfs wantrouwen tegen het geschreven woord, ten gunste van het gesproken woord. Bij Plato is te lezen, in een gesprek tussen koning Thamos en de uitvinder van het schrift:



'*U hebt als vader van de letters uit voorliefde het tegengestelde beweerd van wat het effect is. Want deze uitvinding zal bij de leerling eerder vergeetachtigheid bewerkstelligen, daar hij zijn geheugen verwaarloost, omdat dit - in vertrouwen op het schrift - de dingen zich zal herinneren van buitenaf en niet van binnenuit.*'

Hoewel wij verheugd zijn over de vele waardevolle dingen die via het schrift bewaard gebleven en toegankelijk zijn, lijkt het ons toch goed om in deze tijd, waarin contacturen schaarser gaan worden, doordrongen te zijn van het grote belang dat ook onze voorvaderen aan het gesproken woord gehecht hebben.

Profi-project
Het Profi-project dat door medewerkers van het Freudenthal instituut geleid werd, heeft, na twee jaar experimenteren op twee scholen, in juni een definitief nieuw leerplan voor de profielen Natuur & Techniek en Natuur & Gezondheid van de tweede fase vwo opgeleverd. Een groep van circa 30 deskundigen, waaronder docenten van de experimenteerscholen, leden van het Profi-ontwikkelteam en van de resonansgroepen, heeft zich met de resultaten van het experiment een weekend teruggetrokken om de vele knopen, die in de oorspronkelijke voorstellen bleken te zitten, door te hakken. Er zijn naast de gebruikelijke, noodzakelijke leerstof, zoals differentiaal-en integraalrekening, vele mooie, leuke onderwerpen in het leerplan opgenomen. Natuurlijk is er ook teleurstelling over het schrappen van een aantal onderwerpen, zoals een duidelijke verdieping van de in de onderbouw aangebrachte ruimtemeetkunde. Wij vragen ons af of het wel zo gelukkig is dat er in de profielen Natuur & Gezondheid en Natuur & Techniek havo veel meer ruimtemeetkunde gedaan zal worden dan in het vwo. Hoe één en ander gaat uitpakken zal afhangen van de nieuwe boeken en uiteraard van de creativiteit van de docenten die onze leerlingen bij hun studie zullen begeleiden.

Zeer benieuwd zijn wij naar de inhoud van de trajectenboeken, waarin de te behandelen leerstof duidelijker en met begrenzingen zal worden aangegeven. Dan zal een helderder beeld ontstaan van wat de toekomstige leerling in zijn mars moet krijgen. De vele medewerkers aan het project en met name de docenten van de experimenteerscholen, met als spil van het project Martin Kindt, wil ik hartelijk feliciteren met het succesvolle verloop van hun zware taak.

Leerwegen mavo/vbo/vso

De SLO heeft met de vakontwikkelgroep vbo/mavo voorstellen gemaakt voor de nieuwe examenprogramma's in de leerwegen mavo/vbo/vso. Dankzij de hulp van een groep actieve leden uit deze sectoren is het bestuur in staat geweest uitvoerig commentaar te geven op de voorstellen. Dit commentaar kunt u lezen in Euclides 72-8 (juni 1997).

Bij de SLO heeft het bestuur een projectaanvraag ingediend die gericht is op onderzoek en materiaalontwikkeling, teneinde de aansluitingsmogelijkheden van 4 vbo/mavo naar 4 havo en naar diverse vormen van lang mbo in het nieuwe leerwegenstelsel, te optimaliseren.
Wij hebben de SLO bovendien gevraagd onderzoek te verrichten naar materiaalontwikkeling ten aanzien van het leerwegondersteunend onderwijs. Het bestuur zal in de komende jaren de ontwikkeling rondom de examens vbo/mavo kritisch volgen en zonodig het ministerie blijven voorzien van commentaar en adviezen.

Grafische rekenmachine

Zoals bij u bekend zal zijn, wordt het gebruik van de grafische rekenmachine verplicht bij de invoering van de tweede fase havo/vwo.
De CEVO heeft in december 1996 aan het bestuur gevraagd om te oordelen over een tot dan toe geheim plan om ook snel over te gaan tot invoering van een veel geavanceerder machine, die ook met formules kan werken, laten we zeggen een symbolische rekenmachine.
Het bestuur heeft na rijp beraad besloten om op zo'n snelle invoering negatief te reageren. Wij zijn van mening dat er nog geen duidelijke didactiek bestaat voor de behandeling van het nieuwe leerplan tweede fase, als leerlingen dergelijke symbolische machines mogen gebruiken. Bovendien zijn de enorme kosten, verbonden aan een dergelijke invoering op korte termijn, een reden om de zaak eerst rustig te onderzoeken.
Het bestuur heeft dus met nadruk aanbevolen om eerst te laten onderzoeken hoe de wiskunde op het havo en vwo onderwezen moet worden met behulp van die apparatuur. Een experiment zou dan kunnen uitwijzen of het verstandig is er toe over te gaan de symbolische machine verplicht te stellen. Het kostenaspect zou in het experiment naast de vakinhoudelijke kant uitgezocht moeten worden. Nascholing van docenten zou dan bovendien een noodzakelijke voorwaarde zijn om te zorgen dat de invoering op verantwoorde wijze kan plaats vinden. Eén en ander moet ons inziens niet ten koste gaan van de zoveelste inbreuk op vrije tijd van de wiskundeleraren. Betreurenswaardig vinden wij het dat, om onbegrijpelijke redenen, het verhaal de ronde doet dat het bestuur geen experiment op dit gebied zou willen goedkeuren. Dat is pertinent onjuist! De CEVO heeft volledig afgezien van het plan met betrekking tot de symbolische machine. Het bestuur van de NVvW is nu zelf overgegaan tot het instellen van een werkgroep, die de mogelijkheden van het gebruik van een dergelijk apparaat gaat onderzoeken.

TIMSS

Uit het derde internationale onderzoek naar wiskundige vaardigheden van leerlingen van 12 tot 14 jaar (TIMSS) is naar voren gekomen dat enkele Aziatische landen veruit de beste prestaties lieten zien. Van de Europese landen bleken onze Vlaamse buren de beste resultaten geboekt te hebben, een mooi succes, waar zij zeer mee verguld waren. Nederland scoorde overigens ook vrij goed vergeleken bij vele andere Europese landen. Het blijft de vraag of verschillen in behandelde leerstof en verschillen in aanpak van het onderwijs niet een te belangrijke rol hebben gespeeld bij de uitslag.

De Vereniging

Het bestuur heeft in het afgelopen jaar een onderzoek laten uitvoeren naar het functioneren van onze vereniging. Studenten van de Hogeschool voor Economische Studies (HES) te Rotterdam hebben als afstudeerproject telefonische enquêtes afgenomen bij 150 leden en bij 150 niet-leden. Een van de doelen was: te weten komen waarom vele wiskundeleraren in Nederland geen lid van de vereniging worden. Wij, bestuur, redactie van Euclides en de vele actief meewerkende leden pogen de NVvW iets te laten betekenen voor *alle* wiskundedocenten. Wij hebben ook de steun van veel leden nodig bij het verzorgen van didactische voorlichting, van examenbesprekingen en bij adequate reacties op politieke voorstellen. Na een moeilijke start heeft de groep studenten, die zich met het geïntegreerde project (GIP) bezig hield en die zich '*Wiscontinuïteit 33*' noemde, in het eindrapport een aantal waardevolle adviezen gegeven:

(...) meer dienstverlening zoals informatieverstrekking via direct-mail, nieuwsbrieven en een vast, goed bereikbaar verenigingskantoor, alsmede een actiever beleid betreffende het geven van bekendheid aan datgene wat de vereniging doet, zonder de prijs-kwaliteit-verhouding negatief te beïnvloeden.

Het bestuur zal dergelijke adviezen slechts kunnen opvolgen via een verdergaande professionalisering, gepaard gaande met grotere onkosten. Het ligt in de bedoeling om binnen twee weken een weekend met het voltallige

bestuur te werken aan een stappenplan, dat zal moeten leiden tot een bestuursvorm die voor nog betere dienstverlening zorg kan dragen.

Ons bestuurslid Marian Kollenveld heeft plaats genomen in het bestuur van het Platform van de vakinhoudelijke verenigingen en zal op die plaats de belangen van de NVvW en andere vakinhoudelijke verenigingen extra kunnen behartigen in Den Haag.

Opgestart is vorig jaar ook een soort Ronde-Tafel-gesprek, dat we '*De raad der Wijzen*' hebben gedoopt, en dat bedoeld is als een soort 'toekomstverkenning'. Met een aantal deskundigen uit wiskundeland is onder andere gesproken over de snelle technologische vorderingen wat betreft rekenmachines en de consequenties voor het wiskundeonderwijs. Verder uitte het bestuur de zorg over het feit, dat de theoretisch wiskundige ondergrond in het Hoger Beroeps Onderwijs (HBO), steeds minder gegeven wordt door wiskundige vakdocenten en zelfs vervangen dreigt te worden door louter praktische instructie. Voor deze zaken evenals voor bewaking van de juiste invoering van de nieuwe programma's bij mavo/vbo en havo/vwo wil het bestuur actieve werkgroepen van leden in gaan stellen.
Uiteraard zijn leden die hun steentje kunnen en willen bijdragen welkom zich aan te melden voor een van de werkgroepen. Teken in op de lijsten die in de gang hangen, laat het eventueel één van de bestuursleden vandaag nog weten of bel ons anders zo spoedig mogelijk op.

Euclides
Euclides heeft met de nieuwe hoofdredacteur Kees Hoogland een goed jaar gehad. De redactie is in staat geweest de stijgende lijn vast te houden, waarmee wij hen van harte feliciteren. De voorzitter Bert Zwaneveld heeft de wens uitgesproken, na vele jaren van uitstekende leiding aan de redactie, afscheid te nemen van de redactie.
Aangezien het niet eenvoudig is om voor dergelijke belangrijke posten nieuwe vrijwilligers te vinden, hebben we hem kunnen overhalen nog een jaar aan te blijven.

Wereld-wiskunde Fonds

Wereld-wiskunde Fonds
Het bestuur kan met enige trots constateren dat de oprichting van het Wereld-wiskunde Fonds (WF) een succes is geworden. De vrijwillige bijdragen stellen de commissie in staat wiskundecollega's in de derde wereld aan materiaal te helpen, waarmee zij hun lessen nog beter kunnen geven. Voor de bijdragen van de leden en de inzet van de commissie zijn wij erg dankbaar.

Examens
De examens zijn het afgelopen jaar zeer bevredigend verlopen. Het eerste landelijke examen vbo/mavo op basis van het nieuwe examenprogramma, indertijd opgesteld door de COW, werd eigenlijk door velen erg eenvoudig gevonden. De nieuwe examenstof verschilt zoveel van de leerstof die sinds 1968 gevraagd werd in de traditionele examens, dat wij ons vele zorgen gemaakt hebben over deze eerste landelijke test. De begeleiding van en de voorlichting aan de betrokken docenten, alsmede de energie die de docenten hebben gestoken in de voorbereiding van hun leerlingen zullen mede oorzaak van het goede resultaat geweest zijn. Wij hopen dat ook de *Special* van Euclides, die de NVvW vorig jaar, met hulp van de CEVO, naar alle betrokken scholen heeft gestuurd, bijgedragen heeft aan het succes.
Ook het wiskunde A-examen voor het havo was aan de eenvoudige kant. Het blijft moeilijk om voor de eindexamens precies op het juiste niveau opgaven te maken. De constructiegroepen wensen we succes met hun uiterst moeilijke, maar boeiende taak.
Onze examenbesprekingen zijn weer goed bezocht en wij zijn verheugd dat die besprekingen in een behoefte voorzien. Voor de eerste keer zijn er ook voor het nieuwe vbo B-examen besprekingen geweest. Het aantal niet-leden dat onze examenbesprekingen bezoekt stijgt de laatste jaren en was dit jaar in mei 26,4%. Helaas neemt het aantal toe, dat geen lid wil worden van de NVvW. Wij geven bijna 6000 gulden uit, van gewone contributiegelden, om één en ander te organiseren en blijven hopen dat men ons werk wil steunen door lid te worden. Een persoonlijke opwekking van u aan uw niet-lid-collega zal ons inziens veel helpen.

MTO
Het platform van MTO-docenten heeft als werkgroep van de NVvW heel veel werk verzet in het belang van de docenten in het MTO. Regelmatig kunt u in Euclides lezen over het TWIN-project en de gevolgen voor het technische onderwijs. Wij verwelkomen de vele nieuwe leden uit het mbo en hopen dat zij een blijvende aanwinst binnen onze vereniging zullen vormen.

Vrouwen en Wiskunde
De werkgroep Vrouwen en Wiskunde heeft in het afgelopen jaar enkele malen een 'discussietafel' georganiseerd voor belangstellenden in het onderwerp 'meisjes en wiskunde'. Op de bijeenkomsten werden korte presentaties gehouden over actuele ontwikkelingen, zoals de uitslag van TIMSS, de plannen voor het vbo/mavo

en het onderzoek 'allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs'.
Verder is opgestart een wiskunde- en science-project voor de basisschool onder de titel 'De Droomschool'. Een aantal vrouwelijke beroepsbeoefenaren, zoals een timmerkracht en een brandwacht hebben de leerlingen wiskundige- en science-activiteiten laten uitvoeren die verband hielden met hun beroepspraktijk. Het project werd afgesloten met een 'science happening voor ouders en kinderen'.
Actief is men verder met de werkgroep VICTO (Vrouwen en IC-toepassingen in het onderwijs).

Didactiekcommissie
Helaas heeft onze didactiekcommissie onvoldoende impulsen om in de eerstkomende tijd activiteiten te ontplooien. Tijdelijk, hopen wij, gaan zij een 'winterslaap' houden om dan met hernieuwde krachten bij de nieuwe programma's ons verder van dienst te zijn. Mede-oprichter en initiator Harrie Broekman bedank ik van deze plaats heel hartelijk voor de jarenlange inspanningen bij die belangrijke commissie. Hopelijk staan er nieuwe leden op, met de werklust en creativiteit van Harrie om brochures en artikelen voor Euclides te schrijven of werkgroepen te leiden waar wij allemaal profijt van kunnen trekken.

Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars
De Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars (VVWL) heeft in juli haar tiende driedaagse congres gehouden. Het is een zeer groot succes geworden. Veel meer Nederlandse wiskundeleraren dan bij vorige congressen hebben deze keer deelgenomen aan en genoten van boeiende lezingen en uiteraard van de gezellige Vlaamse gastvrijheid. Wij wensen de VVWL veel succes bij de volgende tien congressen.

Pythagoras
Het tijdschrift Pythagoras heeft de opgaande lijn vastgehouden, dankzij de creativiteit van de nieuwe redactie. De auteurs van de artikelen zijn bijna allemaal academici, die voor leerlingen van de bovenbouw havo/vwo boeiende en interessante wiskunde beschrijven. Om het tijdschrift ook aantrekkelijk te maken voor wiskundig geïnteresseerde leerlingen van de onderbouw is de redactie nog op zoek naar wiskundedocenten, die op de hoogte zijn van de modernere ontwikkelingen in ons wiskundeonderwijs en die eenvoudige artikelen over leuke wiskunde op middelbare-schoolniveau kunnen schrijven of opzoeken en bewerken. Als u bereid en in staat bent mee te werken aan dergelijke artikelen verzoek ik u contact op te nemen met de redactie van Pythagoras, hier vandaag aanwezig, of met een van de bestuursleden van de NVvW.

Ten slotte
Alvorens over te gaan op het themagedeelte van onze studiedag wil ik nog wijzen op de steeds uitgebreidere markt met materialen en boeken. De NVvW heeft zelf ook een tafel met onder andere mooie posters, die wij tegen kostprijs en dus zonder winstoogmerk verkopen, in de hoop u van dienst te zijn bij het opfleuren van het wiskundelokaal.
Het thema van onze studiedag is: '*Veranderingen, b(l)oeiend*'.
Het bestuur heeft met genoegen gezien hoe ons oud-bestuurslid, Nellie Verhoeff, zich met groot enthousiasme gestort heeft op de organisatie van deze dag. De enorme klus die zo'n organisatie met zich mee brengt is door haar, in samenwerking met ons bestuurslid Freek Mahieu, geklaard en dus geef ik met veel vertrouwen Nellie straks het woord en wens u nu al vast een leerzame, plezierige dag toe.

Hans van Lint

Noot

* De voorzitter van de NVvW sprak deze rede uit aan het begin van de Jaarvergadering/studiedag van de vereniging op 15 november 1997.


Nellie Verhoef

INTERVIEW

'Onze studenten kiezen enthousiast voor het leraarschap'

Chris Horlings geeft sinds 1985 les aan de PTH (Pedagogisch Technische Hogeschool) te Eindhoven in allerlei vakken die te maken hebben met wiskunde of didactiek van de wiskunde. In 1979 is deze leraren(dag)opleiding voor de technische vakken gestart als experimentele opleiding onder de naam NLO (Nieuwe LerarenOpleiding). Vanaf 1997 vormt zij een onderdeel van de Faculteit Educatie van de Fontys Hogescholen.

Voor welke soorten onderwijs worden de PTH-studenten opgeleid?
Studenten die bij ons afstuderen in een technisch vak (bijvoorbeeld bouwkunde, metaal of electrotechniek/informatica) zijn bevoegd om les te gaan geven in het mbo of het vbo. Studenten die bij ons een exacte studierichting gekozen hebben (natuurkunde, wiskunde of techniek) kunnen daarnaast ook naar mavo en naar de eerste drie leerjaren van havo of het vwo.



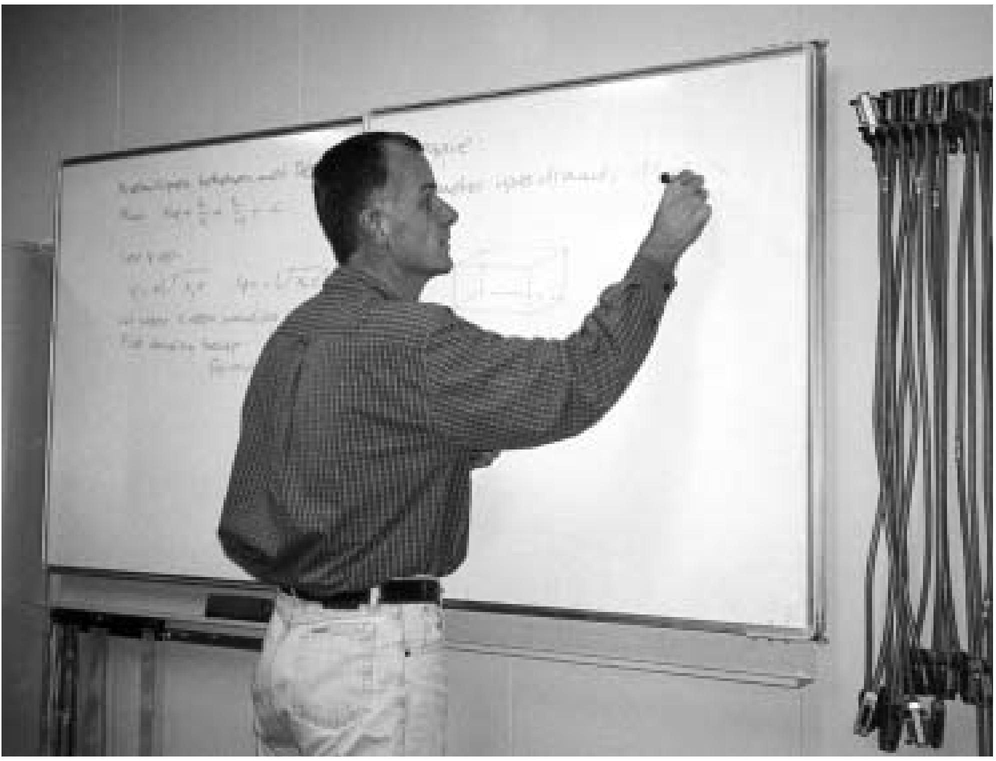
Waarin onderscheidt de PTH zich van andere lerarenopleidingen?
We zijn de enige lerarenopleiding voor de technische vakken. Bij de exacte vakken leiden we op tot dezelfde tweedegraadsbevoegdheid als andere lerarenopleidingen, maar zijn we misschien een beetje meer georiënteerd op het mbo en het vbo.

Kun je een typering geven van de student die wiskunde studeert bij jullie?
Dat valt niet mee, want de studenten die bij ons instromen verschillen onderling sterk van elkaar. Sommigen komen van de havo, het mbo of het vwo, anderen stappen naar ons over vanuit een andere hbo-opleiding. Er zijn er ook die weer een studie oppakken na jarenlang gewerkt te hebben of nu hun kinderen zelfstandig beginnen te worden.

Waar halen jullie studenten de motivatie vandaan in deze tijd, waarin het vak van leraar niet hoog scoort?
Daar moeten wel idealen achter zitten: graag met jonge mensen om willen gaan, andere mensen iets willen leren. We hebben ook wel studenten die het nog niet zo zeker weten, die de mogelijkheid open willen houden om naar het bedrijfsleven te gaan.

Heeft het gratis maken van het eerste studiejaar een positieve invloed gehad op het aantal studenten?
Nee, daar hebben wij niets van gemerkt. Ik denk dat dat geen doorslaggevende factor is als je overweegt om te gaan studeren.

Zijn er in de afgelopen jaren veranderingen in de inhoud van de studie geweest?
De opleidingen zijn gemoduleerd. We hebben geëxperimenteerd met project-onderwijs. De studenten zijn bij het vak wiskunde veel meer gebruik gaan maken van computeralgebra. In de komende jaren komen



er weer grote veranderingen, als de leraren-opleidingen een gemeenschappelijk curriculum krijgen binnen de kaders die bedacht zijn door het PmL (Procesmanagement Lerarenopleidingen).

Welke vakken zijn op dit moment de belangrijkste in de wiskundelerarenopleiding aan de PTH?
Centraal staan bij ons de vakken op het gebied van de vakdidactiek en de schoolstages. Dat zal in de toekomst ook wel zo blijven.

Enige tijd geleden kregen de tweedegraads lerarenopleidingen een visitatiecomissie op bezoek. Wat doen jullie met het rapport van die commissie?
Sommige aanbevelingen zijn nu overgenomen. Bijvoorbeeld de aanbeveling om de positie van de onderwijskundigen zo in te richten dat ze meer direct betrokken worden bij de ontwikkelingen binnen de diverse studierichtingen. Andere aanbevelingen blijven een bron van zorg. Het visitatierapport zegt bijvoorbeeld dat de hogescholen 'een scherp onderscheid moeten maken tussen de doelstelling om het onderwijs te extensiveren om te bezuinigen in de uitvoeringskosten en de doelstelling om het onderwijs te vernieuwen'. Het wringt bij ons nog steeds wel tussen wat we willen en waar we de middelen voor hebben.

Komen jullie studenten na hun afstuderen altijd voor de klas terecht, of vinden ze ook wel eens elders een baan, niet als wiskundeleraar?
De studenten die bij de afdeling wiskunde afstuderen vinden meestal een baan als wiskundeleraar. Zo'n tien jaar gelden was dat anders: toen gingen veel van onze studenten naar het bedrijfsleven, vaak in de automatisering. Het bedrijfsleven lokt nu ook nog wel, maar het lijkt net alsof de studenten die de laatste jaren bij ons wiskunde komen studeren duidelijker voor het leraarschap kiezen. Sommigen zijn zo enthousiast dat scholen straks blij mogen zijn zulke mensen binnen te kunnen halen…

Ynske Schuringa





Over de Tweede Fase

Kees Hoogland

De grafische rekenmachine

In 2000 (havo) en 2001 (vwo) is er een examinering volgens het oude programma (1999-starters) en volgens het nieuwe programma (1998-starters).
Bij het nieuwe programma is de GR uiteraard toegestaan.
Er is nu inmiddels ook het volgende besloten:
Op de examens havo-2000-oude-programma en vwo-2001-oude-programma zal de GR ook toegestaan worden bij de vakken Wiskunde A, natuurkunde, scheikunde, biologie en economie 2.
Echter nog niet bij Wiskunde B!
Het wiskunde-A examen zal zodanig worden opgesteld dat een leerling die werkt met een GR, daar geen wezenlijk voordeel van zal hebben.
In het volgende nummer van Euclides volgt uitgebreide informatie hoe die examens in dit 'overgangsjaar' (havo 2000 en vwo 2001) er precies uit zullen zien.

Andere publicaties

Tussen nu en de zomer zullen allerlei publicaties ongetwijfeld nog het licht zien.
De definitieve versies van de *examenprogramma's* moeten nog officieel gepubliceerd worden in Uitleg.
Het Cito heeft het voornemen weer een *syllabus* uit brengen met toelichtingen op de examenprogramma's.
Ook voor het vbo/mavo-examenprogramma is er destijds zo'n syllabus uitgebracht: een nuttige concretisering en afbakening van de soms toch wat algemene formuleringen in het examenprogramma.
Het definitieve *inrichtingsbesluit* is mogelijk inmiddels al op de scholen.
Daarin staan de meer algemene regelingen, maar ook de manier waarop wiskunde A met Wiskunde B gecombineerd kan worden.
(Zie ook Euclides 73-2.)
De definitieve regeling rond *Praktische Opdrachten* zal waarschijnlijk in de officiële examenprogramma's terug te vinden zijn.

Starten in 1998

In Euclides 73-3 heeft een lijst gestaan met scholen die aan de redactie hebben gemeld te zullen starten in 1998.
Onderstaande scholen starten in 1998 in 4 havo én 4 vwo:
Zernike College, Haren
Vlaardingse Openbare SG
Pauluslyceum, Tilburg
Cobbenhagecollege,Tilburg
Thorbecke SG, Zwolle
Oranje Nassau College, Zoetermeer
Carolus Clusius College, Zwolle
Montessori Lyceum Amsterdam
Varendonckcollege, Asten
Stedelijk Dalton Lyceum, Dordrecht
De contactpersonen van deze scholen kunt u vinden in Euclides 73-2.
Inmiddels heeft zich nog een school aangemeld:
Esprit SG/Berlage, Amsterdam
Pieter Peeters
020 - 6646975
101505.3334@compuserve.com

Onderstaande scholen starten in 1998 alleen in 4 vwo:
St. Michaël College,Zaandam
Oosterlicht College, Nieuwegein
Jac P. Thijsse College, Castricum
Het Baarns Lyceum, Baarn
Stedelijk College Zoetermeer
SG Reggesteyn, Nijverdal
Heerbeeck College, Best
Emelwerda College, Emmeloord

Daarbij zijn gekomen:
dr. Aletta Jacobscollege, Hoogezand
F. Slamat
0598 - 325861
OSG De Meergronden, Almere
Jaap Noordzij
020 - 6633723
106353.2121@compuserve.com
CSG Willem de Zwijger, Schoonhoven
Dick van der Leeden
0182 - 383661
Commanderij College, Gemert
Th. v. Vlerken
0492 - 364151
De Waezenburg, Leek
Ben Scholten
0594 - 514004
mail@waezenburg.nl

Alleen in 4 havo start in 1998:
Kempenpoort VO, Eindhoven

Ik weet zeker dat er meer scholen zijn die in 1998 starten.
U kunt zich nog steeds melden!!

Studielast en lesuren

De meeste scholen zijn op dit moment aan het worstelen met de verdeling van de studielast over de jaren en met de vertaling daarvan in lesuren.
Juist de 1998-starters hebben hierbij een voortrekkersrol.
Die scholen roep ik dan ook op om de volgende tabelletjes voor **wiskunde** in te vullen en aan de redactie te sturen.

slu	C&M	E&M	N&G	N&T
4 vwo				
5 vwo				
6 vwo				

slu	C&M	E&M	N&G	N&T
4 havo				
5 havo				

In een later nummer kan dan misschien een aantal varianten getoond worden.

Recreatieve wiskunde in Nederland in de 17de eeuw:

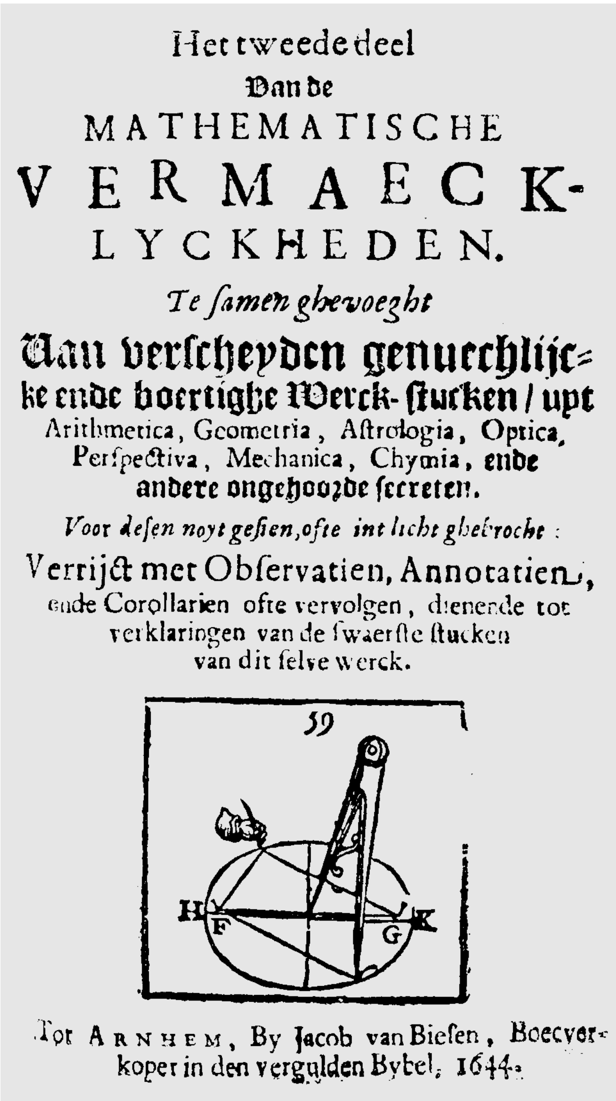
Wynant van Westen

Wisconstighe Vermaecklyck-heden

Danny Beckers

Inleiding

In het *Liber Abaci* (1202) van Leonardo van Pisa staat, behalve het sommetje met de konijnen dat aanleiding geeft tot de rij van Fibonacci-getallen, een opgave over een leeuw, een tijger en een beer. Van deze drie beesten is gegeven hoe lang ze ieder afzonderlijk doen over het verorberen van een schaap. De vraag is vervolgens in hoeveel tijd ze met zijn drieën een schaap opeten, aangenomen dat ze elkaar niet in de weg zitten of te lijf gaan. Dergelijke opgaven gaan terug tot de papyrus Rhind (± 1850 v. Chr.). Ook in het eerste gedrukte wiskundeboek, de *Summa de Arithmetica* (1494) van Luca Pacioli komen dergelijke opgaven voor[1].


Het tweede deel
Van de
MATHEMATISCHE
VERMAECK-
LYCKHEDEN.
Te samen ghevoeght
Van verscheyden genuechlijcke ende boertighe Werck-stucken / uyt
Arithmetica, Geometria, Astrologia, Optica, Perspectiva, Mechanica, Chymia, ende andere ongehoorde secreten.
Voor desen noyt gesien, ofte int licht gebrocht:
Verrijckt met Observatien, Annotatien, ende Corollarien ofte vervolgen, dienende tot verklaringen van de swaerste stucken van dit selve werck.

Tot ARNHEM, By Jacob van Biesen, Boecverkoper in den vergulden Bybel, 1644.

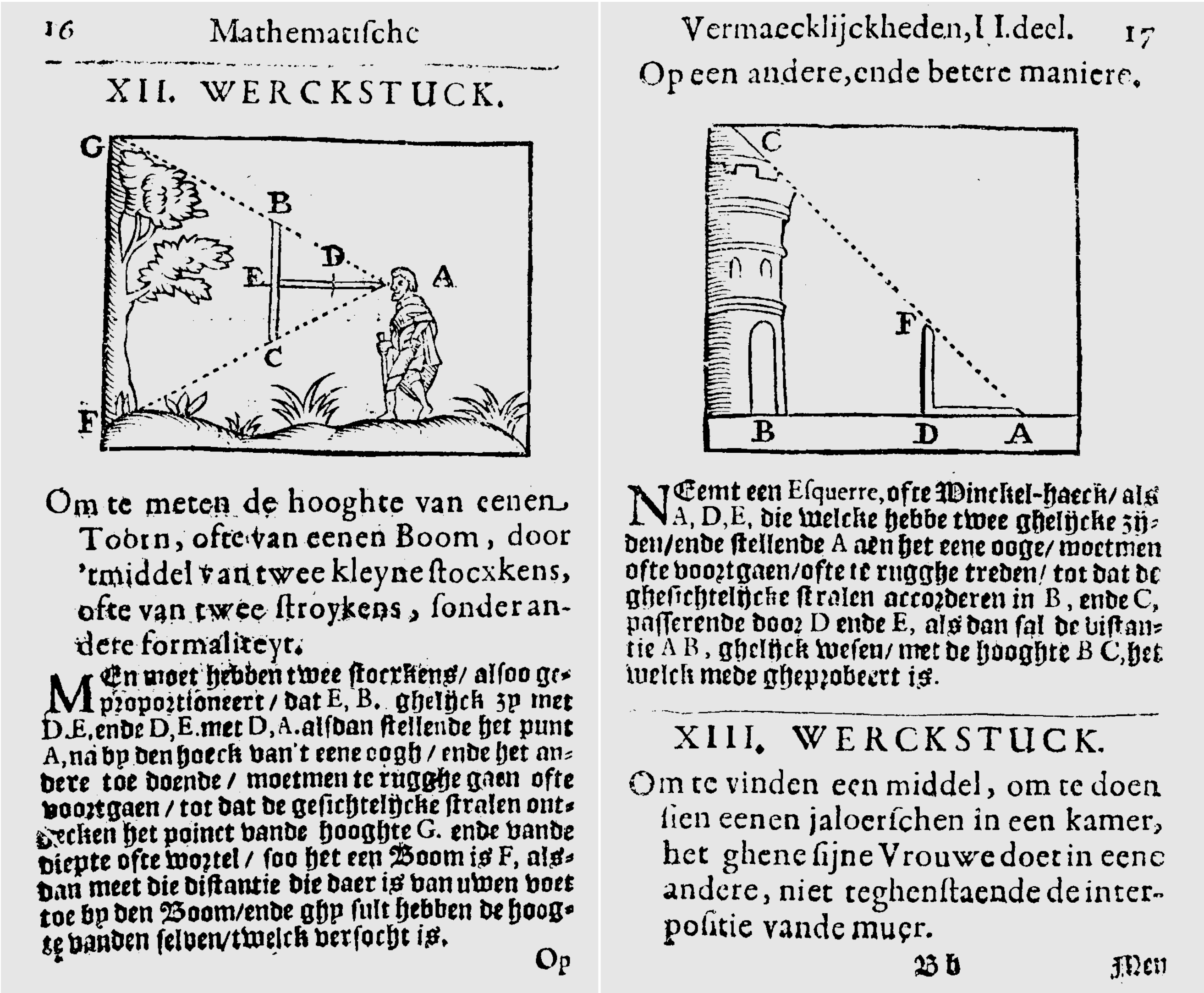
Zijn dit soort opgaven als recreatieve wiskunde te karakteriseren? Dat hangt er vanaf waarvoor ze gebruikt werden: aangezien ze voorkomen in series opgaven die als leerboek bedoeld waren is dat niet waarschijnlijk. Onder ‘recreatieve wiskunde’ versta ik al dan niet uitgewerkte opgaven of verhaaltjes die door degenen die ze schreven en lazen als wiskunde werden beschouwd, en die in de eerste plaats bedoeld waren om de lezer te vermaken.

Nederland

In de bovengenoemde betekenis komen we tot de zeventiende eeuw in Nederland geen recreatieve wiskundeboeken tegen: wel zijn bij vier Nederlandstalige schrijvers series opgaven bekend die ter afsluiting achter hun rekenboeken werden toegevoegd. Gemma Frisius had een aantal grappige opgaven achter zijn (Latijnse) arithmetica gevoegd. Bij de schoolmeester Adriaan van der Gucht uit Brugge heten ze in 1569 ‘ghenoughelicke raedselen aenroerende den cijfer, om eenighe ghezelschepen te verblijden’. Bij de in Dordrecht woonachtige kostschoolmeester Bernard Stockmans heten ze ‘exempelen ende lustighe vraeghen ten besluyte’. Een aardig spelletje uit het rekenboek van laatstgenoemde was ‘den Rijnckspele’. Bij dat spel stonden negen of minder meisjes in een kring om een ‘goochelaar’. De laatste moest raden wie van de meisjes de ‘Rijnck’ (ring) had, aan welke vinger en aan welk lid. De meisjes kregen ieder een nummer (1-9), de vingers ook en zo ook de drie kootjes. Wanneer de drie gevraagde getallen respectievelijk a, b en c worden genoemd, dan kregen de meisjes in de kring in moderne notatie de bewerking $(5(2a + 5) + b)10 + c$ uit te voe-

ren. De uitkomst daarvan vertelden ze de 'goochelaar'. Na aftrekking van 250 hield die van dat getal precies $100a + 10b + c$ over, hetgeen het raden een stuk eenvoudiger maakte[2].
In 1600 verscheen als appendix van het *Chijfer-boeck* van Martin van Dijcke een serie 'subtijle lustige / recreatieve Questien / dienende om het verstant te vermaken en te scherpen'. Recreatieve wiskundeboeken zijn dit echter geenszins: het waren op de eerste plaats rekenboeken, die daarnaast enige vermakelijke opgaven boden. Waarschijnlijk is er nog meer wiskundig vermaak geweest, maar dan in de vorm van mondelinge overdracht, bijvoorbeeld in de vorm van gedichtjes of liedjes[3].

In Nederlandse rekenboekjes voor 1600 komen nog meer opgaven voor die recreatief zouden kunnen worden genoemd: met name de opgaven die in aanmerking komen voor behandeling met de *regula falsi* doen vaak vermakelijk aan[4]. Ook de getallenmystiek, die voor velen in de zestiende eeuw tot de getallenleer behoorde, en zodoende in sommige rekenboekjes opdook[5], zou door ons als grappig kunnen worden ervaren. De tijdgenoten bekeken dergelijke opgaven echter zeer serieus, als leermiddel of als diepe wijsheid, en dus is het enigszins bezwaarlijk ze tot 'recreatieve wiskunde' te bestempelen.



16 Mathematische

XII. WERCKSTUCK.

Om te meten de hooghte van eenen Torn, ofte van eenen Boom, door 'tmiddel van twee kleyne stocxkens, ofte van twee stroykens, sonder andere formaliteyt.

Men moet hebben twee stocxkens/ alsoo geproportioneert / dat E, B, ghelijck zy met D,E, ende D,E, met D,A. alsdan stellende het punt A, na by den hoeck van't eene oogh / ende het andere toe doende / moetmen te rugghe gaen ofte voortgaen / tot dat de gesichtelijcke stralen ontdecken het poinct vande hooghte G. ende vande diepte ofte wortel / soo het een Boom is F, alsdan meet die distantie die daer is van uwen voet toe by den Boom/ende ghy sult hebben de hooghte vanden selven/t'welck versocht is.

Op

Vermaecklijckheden, I I. deel. 17

Op een andere, ende betere maniere.

Neemt een Esquerre, ofte Winckel-haeck/ als A, D,E, die welcke hebbe twee ghelijcke zijden/ende stellende A aen het eene ooge/ moetmen ofte voortgaen/ofte te rugghe treden/ tot dat de ghesichtelijcke stralen accorderen in B, ende C, passerende door D ende E, als dan sal de distantie A B, ghelijck wesen/ met de hooghte B C, het welck mede gheprobeert is.

XIII. WERCKSTUCK.

Om te vinden een middel, om te doen sien eenen jaloerschen in een kamer, het ghene sijne Vrouwe doet in eene andere, niet teghenstaende de interpositie vande muer.

B b Men

De auteur en het publiek

In 1624 publiceerde Jean Leurechon zijn *Récreations Mathématiques*, dat een hele verzameling van wiskundige grapjes en spelletjes bevatte die al eerder in rekenboeken waren verschenen. De *Récreations* werden waanzinnig populair: voor 1700 waren er al 34 edities verschenen. Dit werk werd door de Nijmeegse 'wiskundige' en organist Wynant van Westen gebruikt als basis voor zijn *Mathematische Vermaecklyckheden*, dat in drie delen in 1636 verscheen. Het boek zou ook in Nederland een succes worden: in 1673 verscheen een zesde editie. Het boek had absoluut geen wetenschappelijke,

utilitaire of pedagogische pretenties; Van Westen wilde, volgens het voorwoord, slechts aanleiding geven tot enige genoeglijke uurtjes. Daarmee is het boek van Van Westen bij mijn weten het eerste recreatieve wiskundeboek in Nederland. Over W. van Westen zelf is niet veel bekend. Hij werd in 1621 aangesteld te Nijmegen als organist van de St. Stevenskerk en overleed in 1636, kort na het verschijnen van zijn boeken. Het publiek dat Van Westen met zijn boek trachtte te bereiken was de toenmalige Nederlandse elite: alleen zij beschikten over het geld om boeken aan te schaffen. Er bestond interesse voor exacte wetenschap: zij werd door deze elite als een zeer respectabele tijdsbesteding beschouwd. Natuurlijk was niet iedereen zo serieus met wiskunde bezig als Johan de Witt, die met zijn *Elementa Curvarum Linearum* een serieuze bijdrage tot de Cartesiaanse meetkunde leverde[6]. Het boek van Van Westen mikte vooral op die mensen die zich niet speciaal met de wiskunde bezig hielden, er ook niet zo veel van wisten, maar een meer oppervlakkige interesse hadden voor de exacte wetenschap.

Het boek

De eerste raadseltjes in het boek van Van Westen gaan over het raden van een getal dat iemand in gedachten heeft genomen. Ze worden gepresenteerd als goocheltrucs. Eén van de trucs, er volgen nog een aantal variaties, is als volgt:

Doet het ghetal dat yemant denckt met 3. vermenighvuldigen / ende van de uytkomste de helft afnemen / soo het even is / soo niet / doeter I by vergaren / op dat het even worde; laet dan dese helft wederom met 3. vermeerderen [vermenigvuldigen] / ende vraeght hoe menighmael 9. hy in dese uytkomst heeft / ende soo menighmael als u gheseydt wordt / soo menighmael 2. sal het ghetal zyn dat hy ghedacht heeft / daer by altydt een moet ghevoeght worden / soo men by de helft een by ghedaan heeft: Ende soo men bevindt dat daar niet eens 9. in bekomen wordt / soo sal het ghedacht getal maar I zyn.[7]

Een getallenvoorbeeld helderde de rekensom vervolgens op. Merk op dat het geval 1 apart wordt behandeld. De reden daarvoor is dat 0 en 1 niet als getallen werden beschouwd. Een getal was volgens het rekenboek van Bartjens - een van de meest gebruikte rekenboekjes in die tijd - een verzameling van eenheden, waarbij het woord ‘verzameling’ niet in de abstracte zin werd gehanteerd zoals wij tegenwoordig gewoon zijn. Een verzameling met één, of zonder elementen was geen eigenlijke verzameling: in die zin was 2 het kleinste getal en waren 0 en 1 aparte gevallen[8].

Een ander soort opgaven was het aloude soort gezochte algebraïsche opgaven die al eeuwenlang ook in leerboekjes opdoken:
Pythagoras, ghevraeght zynde na het ghetal syner Scholieren / Antwoorde: De helft van dezelve studeren in Mathesi / het vierendeel in Physica / ende het sevende deel leeren swyghen / ende boven dien zynder noch drie vrouwen / raet nu eens hoe veel Scholieren datter geweest zyn? Antwoort 28. Want de helft van 28. is 14. Het vierendeel 7. het sevendeel 4. met noch 3. vrouwen / maken even juyst 28.[9]
Het vraagstuk, en met name de uitwerking, illustreert fraai de algebraïsche kennis van Van Westen en zijn publiek. Blijkbaar kon men zich verwonderen over het feit dat dit soort opgaven oplosbaar waren, en beheerste men niet zoveel arithmetica dat een echte oplossing met behulp van de *regula falsi* volgens Bartjens mogelijk was.

Een andere opgave betrof bijvoorbeeld drie kannen, van inhouden 8, 5 en 3. De grootste was gevuld, en de inhoud ervan moest met behulp van de andere twee in twee gelijke delen worden verdeeld. Er zijn ook een paar meetkundige ‘vermaken’: het bepalen van de hoogte van een boom of een toren met twee stokjes van bekende lengte, gebruikmakend van gelijkvormigheid van driehoeken; de ‘constructie’ van een voorwerp dat door een vierkante, een cirkelvormige en een ellipsvormige opening paste, met behulp van projecties. Een constructie van cirkels met een willekeurige middellijn, gegeven een passer met constante opening geschiedde met behulp van een kegel met variabele tophoek: met de passerpunt in de top van de kegel konden op de mantel cirkels van verscheidene afmetingen worden uitgezet[10].

Wiskundige wetenschappen

Het meest verwonderlijk voor ons is dat het boek van Van Westen voor het merendeel gevuld is met vraagstukken die wij helemaal niet mathematisch zouden noemen, maar eerder onder de fysica zouden rangschikken. Eén van de ‘werckstucken’ betrof bijvoorbeeld het idee dat achter de huidige fotocamera steekt: ‘Te vertoonen in een besloten camer al wat omtrent dezelve van buyten passeert’[11]. In een compleet verduisterde ruimte werd in één der wanden een gat gemaakt waarin eventueel nog een brillenglas werd gestoken. Op een wit scherm tegenover dit gat verschenen de beelden die buiten de kamer zichtbaar waren.
Het bekende vraagstuk over de wolf, de hinde en de kool die de boer paarsgewijs naar de overkant van een rivier moet varen zonder dat ze elkaar te lijf gaan, laat zich ook lastig als wiskundig classifice-

ren. Verder komen het maken van een fontein ter sprake, wordt er gespeculeerd over spiegels en het derde deel handelt in zijn geheel over vuurwerk[12].

Het verschijnen van dergelijke opgaven in een recreatief wiskundeboek heeft alles te maken met de heersende opvattingen over wat wiskunde eigenlijk was. De wiskundige wetenschappen omvatten ook die vakgebieden, die we tegenwoordig fysica of ingenieurswetenschappen zouden noemen: in het boek *De geheele Mathesis* van Abraham de Graaf werden bijvoorbeeld ook de vestingbouw en de constructie van zonnewijzers behandeld[13]. Voor velen, en volgens het titelblad van het tweede deel van de *Mathematische Vermaecklyckheden* ook voor Van Westen, behoorde zelfs de astrologie tot het gebied van de wiskundige wetenschappen[14]. Volgens Van Westen's beroemde tijdgenoot Descartes was de wiskundige manier van redeneren de enige manier om tot zekere kennis te geraken; die manier van redeneren paste hij o.a. in de natuurwetenschappen toe. In deze zeer brede karakterisering van wiskunde bevat het boek van Van Westen alleen 'mathematisch' vermaak.

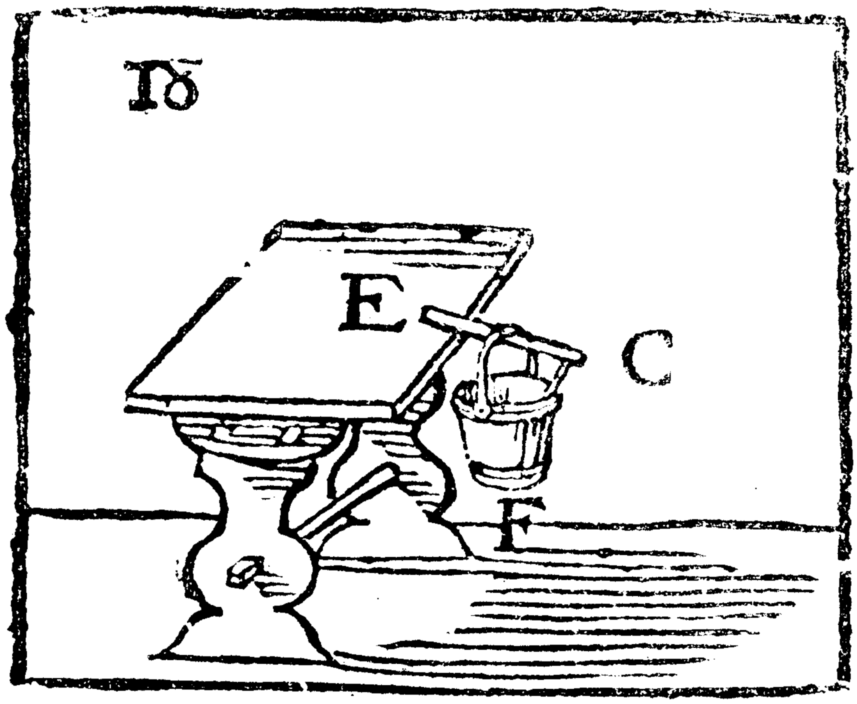
Cartesianisme

Descartes schatte de waarde van de 'wiskundige' redenering zeer hoog. Experimenten ter verificatie van zijn theorieën deed hij niet: de wiskundige uitkomst vertelde hem immers alles. Ook dit aspect van de Cartesiaanse wetenschapsopvatting is in het boek van Van Westen terug te vinden. Zo vraagt Van Westen zich in zijn boek onder andere af wat er zou gebeuren wanneer de hemel naar beneden zou vallen. Niet al te veel, concludeert hij; omdat zowel de hemel als de aarde bollen zijn, maar de hemel veel groter, zou immers het ene raakpunt tussen de twee bollen en de onmiddellijke omgeving daar slechts last van ondervinden[15].

Eén van de 'werckstucken' luidde: 'Een emmers waters te hanghen aan het eynd van een stock, die haer van selfs om hooghehoudt'[16]. De oplossing is zonder meer verrassend: door een tweede stok te spannen tussen de bodem van de emmer en haar ophangpunt zou de emmer, volgens de redenering van Van Westen, gedwongen worden zich in een vlak evenwijdig aan de vloer te bewegen. In de derde editie is het vraagstuk nog steeds ongewijzigd opgenomen: het illustreert dat de 'wiskundige' theorie voor het zeventiende-eeuwse publiek meer waard was dan de praktijk. Mogelijk werden de 'vermaecklyckheden' alleen als gedachte-experiment uitgevoerd.

Conclusies

Al sinds de zestiende eeuw bestond in Nederland interesse voor recreatieve wiskunde. In de decennia rond 1650 waren er voor het eerst voldoende mensen met enige kennis van de reken- en wiskunde om het voor een uitgever interessant te maken een boek over recreatieve wiskunde uit te geven. Wiskunde was daarbij wel een zeer ruim begrip: de wiskundige wetenschappen omvatten eveneens fysische, mechanische en zelfs astrologische kennis. Deze laatste drie werden op een Cartesiaanse wijze benaderd. De 'echte wiskunde' had in het boek van Van Westen de status van rekenkundige goocheltrucs. De trucs die de boeken van de Nijmeegse organist rijk waren, bouwden voort op het rekenonderwijs: dat hadden de meeste lezers blijkbaar genoten. Verder dan elementair rekenen gingen de vraagstukken niet. Het populaire boek van Van Westen biedt daarmee echter een aardige kijk op de opvattingen over en de kennis van de wiskunde bij een groter - elitair - publiek, ten tijde van de geboorte van de recreatieve wiskunde in Nederland.



Noten

1 *I. Grattan-Guinness*
The Fontana History of the Mathematical Sciences
pp. 140-143, 752
Glasgow (1997)
2 *A.J.E.M. Smeur*
De Zestiende-Eeuwse Nederlandse Rekenboeken
pp. 138-140
Den Haag (1960)
3 *A.J.E.M. Smeur*
'As I was going to St. Ives, I met a man with seven wives' in:
Euclides 40 (1964/65)
pp. 129-136
4 *A.J.E.M. Smeur*
'The rule of false applied to the quadratic equation, in three sixteenth century arithmetics' in:
Archives Internationales d'Histoire des Sciences 28 nr. 102
(Juin 1978), pp. 66-101
5 *A.J.E.M. Smeur*
'Enige zeldzame oude rekenboekjes' in:
Scientiarum Historia 3 (1961)
pp. 190-201
6 Recentelijk vertaald en in facsimile uitgegeven door A.W. Grootendorst
7 *Wynant van Westen*
Mathematische Vermaecklyckheden I (1644[3]), p. 1
8 *W. Bartjens*
Cijfferinge
Amsterdam (1636)
eerste pagina's
9 *Van Westen*, I, p. 171
10 ibidem, respectievelijk I, pp. 26-27; II, pp. 16-17; I, p. 48 en pp. 61-63
11 ibidem, I, p. 5
12 ibidem, respectievelijk I, p. 33; II, p. 45; I, pp. 176 e.v. en dl. III
13 *A. de Graaf*
De geheele mathesis ofte wiskonst
Amsterdam (1776)
14 *Morris Kline*
Mathematics in Western Culture
Londen (1982)
p. 136
15 *Van Westen*, dl. I, p. 256
16 ibidem, I, p. 37

40 jaar geleden

IN MEMORIAM J.H. SCHOGT

Op 8 februari jl. overleed op 65-jarige leeftijd collega J.H. Schogt. Een markante persoonlijkheid, die van grote betekenis is geweest voor de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in ons land, is hiermee heengegaan. Als lid van de redactie van Euclides denk ik hierbij in de eerste plaats aan het vele werk, dat hij voor ons tijdschrift gedaan heeft. Vanaf de oprichting is hij gedurende een periode van bijna 25 jaar redacteur geweest. Verscheidene publikaties zijn van zijn hand in Euclides verschenen; met name op het gebied van de zuivering van de wiskundige vaktaal. Daarnaast was hij van 1925 tot 1929 secretaris van Wimecos. Zowel de redactie van Euclides als het bestuur van Wimecos denken met grote waardering terug aan de nauwgezette wijze, waarop Schogt zijn taak vervuld heeft.
Hij was op didactisch gebied bezield met het ideaal zoveel als mogelijk was wiskundige strengheid in het onderwijs door te voeren. Zelf heb ik mijn eerste wiskunde-onderwijs in de jaren 1921-23 van Schogt mogen hebben en ik gedenk deze lessen nog steeds met dankbaarheid. Degenen, die daar ontvankelijk voor waren, konden van hem leren, hoe men zijn gedachten logisch op kan bouwen en hoe men ze zuiver onder woorden dient te brengen. Zijn didactische idealen vonden hun neerslag in een viertal boeken. In 1929 verschenen zijn Beginselen der Vlakke Meetkunde en Oefeningen in de Vlakke Meetkunde en in 1926 en '27 zijn Beginselen der Theoretische Mechanica I en II. Deze boeken zijn met de uiterste zorg en met grote bekwaamheid geschreven. Menig wiskundeleraar zal er met genoegen kennis van hebben genomen en ze een afzonderlijke plaats in zijn boekenkast gegeven hebben. Helaas heeft de auteur er weinig vreugde van beleefd. Bij zijn pogen de idealen, die hij zich gesteld had, te verwerkelijken, bleek hij te hoog gegrepen te hebben. Hoe waardevol zijn boeken waren, voor de leerling bleken zij te moeilijk. In deze ene zin weerspiegelt zich de tragiek van Schogts loopbaan. Aan de ene kant was hij met een dergelijke liefde voor zijn vak bezield, dat hij niet kon dulden, dat zich als wiskundeonderwijs aandiende, wat op deze naam slechts gebrekkig aanspraak kon maken. Aan de andere kant was hij daarin zo consequent, dat teleurstelling hem niet bespaard kon blijven. Zijn beslist positieve instelling, zijn correctheid en stiptheid mogen ons echter blijvend een voorbeeld zijn.

P.G.J. Vredenduin

Uit: Euclides 33 (1957-1958)

Werkblad

Machtige functies

0010
Geef de binaire schrijfwijze van het decimale getal 60.
Hoe schrijf je dit getal in het 4-tallig stelsel, en hoe in het 59-tallig stelsel?

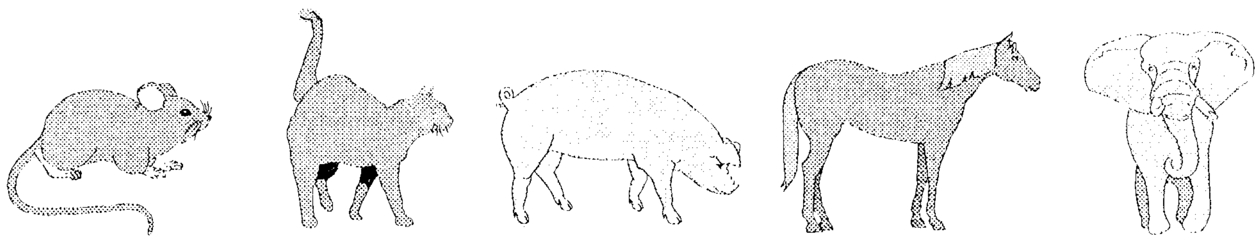
0101
Wat betekent $625^{\frac{3}{4}}$? Laat zien hoe je dit zonder rekenmachine berekent.

0110
Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking

$x^3 - 13x^2 + 32x = 18$?

Geef van elke oplossing een ruwe schatting (in gehelen) en bepaal de kleinste oplossing in drie decimalen nauwkeurig.

0111
Grote dieren produceren meer warmte dan kleine dieren.
De Amerikaanse bioloog Kleiber vond in 1952 voor zoogdieren een verband tussen de warmteproductie W (in kcal) en de massa m (in kg). (De warmteproductie wordt gemeten per dag.)
Voor deze dieren bleek vrij nauwkeurig te gelden dat $W^4 \sim m^3$.
Bij een schaap met een massa van 40 kg blijkt de warmteproductie 1590 kcal te zijn.
Bereken de warmteproductie voor een konijn van 4 kg.
Bij een ander dier is de warmteproductie 5400.
Is dit laatste dier een muis, kat, hond, varken, paard, neushoorn, olifant of walvis?
Kies één van deze diersoorten en geef argumenten voor die keuze.

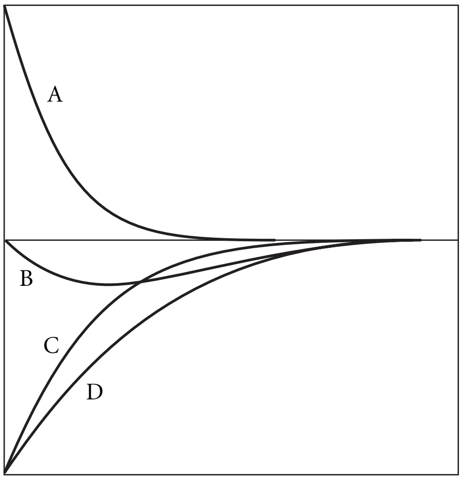


Uit: toets 4vwo Profi-volgschool Esprit Scholengroep / Berlage

Werkblad

Machtige functies

1 Hiernaast zie je de grafieken getekend van:



$y_1 = x^3$
$y_2 = x^5$
$y_3 = y_1 - y_2$
$y_4 = y_1 y_2$

Het venster dat je ziet is [–1, 0] bij [–1, 1].

a Zoek bij elke functie de juiste grafiek (A,B,C of D) en leg kort uit waarom je deze keuzes maakt.
b Zoek uit of y_3 een machtsfunctie is van x.
Zo ja, geef in $y_3 = x^n$ de juiste waarde van n.
Zo nee, leg uit waarom niet.
c Zoek uit of y_4 een machtsfunctie is van x.
Zo ja, geef in $y_4 = x^n$ de juiste waarde van n.
Zo nee, leg uit waarom niet.
d Hoe moet je het venster kiezen om deze grafieken alle vier te zien voor $0 \leq x \leq 2$?

2 a. Schrijf het 2-tallige getal 101010101 in het 10-tallige stelsel.
b. Schrijf het 16-tallige getal ABCD in het 10-tallige stelsel.
c. Schrijf het 11-tallige getal AAA in het 6-tallige stelsel.

Uit: toets 4vwo Profi-volgschool GS Randstad

A.N.Kolmogorov/A.P.Yushkevich (Eds.)
Mathematics of the 19th century
Geometry
Analytic Function Theory
Basel, Birkhäuser Verlag. 1996.
302 pagina's. Hardcover DM 118,–
ISBN 3-7643-5048-2

Mathematics of the 19th century is een serie boeken over de geschiedenis van de wiskunde in de negentiende eeuw onder redactie van de Russen Kolmogorov en Yushkevich. Deel 1 gaat over logica, algebra, getaltheorie en waarschijnlijkheidsleer. Deel 2, dat hier besproken wordt, gaat over meetkunde en functietheorie. Deel 3, over differentiaal- en integraalrekening en numerieke wiskunde, moet nog in het Engels verschijnen.
Was dit boek maar eerder in het Engels verschenen, dan zou ik het vaak geraadpleegd hebben bij het volgen van de vakken affiene en projectieve meetkunde, topologie en functietheorie! Ik zou veel beter begrepen hebben waar alles vandaan komt en wat de verbanden tussen deze vakgebieden zijn.
Een zeer interessante historische lijn loopt van Leibniz' *geometria situs* (meetkunde van plaats, dit in tegenstelling tot de meetkunde van grootte) tot de *topologie*. Onder plaatsmeetkunde wordt een meetkunde verstaan die geen metriek nodig heeft. We kunnen denken aan het Königsberger brugprobleem of aan Eulers stelling over polyhedra (de som van het aantal hoekpunten en het aantal zijvlakken is gelijk aan het aantal ribben plus twee). Maar ook Gauss' problemen uit de knopentheorie horen thuis in de plaatsmeetkunde, omdat ze niet afhangen van een metriek.

De term *topologie* stamt uit een artikel *Vorstudien zur Topologie* (1847) van Johann Benedikt Listing (1808-1882), een leerling van Gauss. Listing had deze term samengesteld uit de Griekse woorden *topos* (plaats) en *logos* (studie). De term *topologie* diende Leibniz' term *geometria situs* te vervangen omdat deze altijd nog een metriek suggereert.

Men was vooral geïnteresseerd in eigenschappen die invariant zijn onder bepaalde transformaties. Poncelet (1788-1867) hield zich vooral bezig met *projectieve* eigenschappen: eigenschappen die invariant zijn onder projecties of een serie projecties. Projectieve meetkunde was voor hem de studie van projectieve eigenschappen. Poncelet zat in Napoleons leger toen dit Rusland binnenviel.
In november 1812 werd Poncelet - zoals zovelen - gevangengenomen. Gelukkig had hij de gelegenheid om zich samen met enkele collega's met wiskunde bezig te houden. Toen Poncelet in 1815 naar Metz terugkeerde had hij de projectieve meetkunde een stuk verder ontwikkeld. Maar nog altijd bevatte de definitie van *cross ratio* een metrisch concept: dat van de lengte van een lijnstuk. Christian von Staudt (1798-1867) slaagde er in 1847 in om een projectieve meetkunde te funderen die onafhankelijk is van enig metrisch concept.

Het ontstaan van de niet-Euclidische meetkunde kan met recht revolutionair genoemd worden. Eeuwenlang had men geprobeerd het vijfde postulaat te bewijzen uit de andere vier, maar zonder resultaat. Bij grote geesten kwam toen het idee op om uit te gaan van een postulaat contradictoir aan het vijfde postulaat en er een tegenspraak uit af te leiden. Deze tegenspraak bleef echter uit. Men bleek zeer interessante meetkunde te krijgen met postulaten, contradictoir aan het Euclidische. Aangezien men geloofde dat de ruimte driedimensionaal en Euclidisch was, was dit een grote schok. Onafhankelijk van elkaar ontdekten Lobachevski (1826), Gauss en Bolyai (1823) een niet-Euclidische meetkunde. Gauss schreef zoals gewoonlijk bijna niets op en Bolyais artikel was zo ondoorgrondelijk geschreven dat zijn tijdgenoten hem niet begrepen. Het schijnt dat Bolyai hier zo depressief van raakte dat hij er nooit meer overheen gekomen is. Waarschijnlijk heeft alleen Gauss begrepen wat Bolyai opgeschreven had, maar dit heeft Bolyai ook niet vrolijker gemaakt. Gauss schreef namelijk aan Bolyais vader, ook een wiskundige:

Now a few words about your son. If I begin by saying that I should not praise this work, you will be astonished at first, but I cannot do otherwise. To praise it would be to praise myself: the entire content of the essay, the route followed by your son, and the results he obtained, coincide with my own discoveries, some of which date back 30 or 35 years.

Toen Gauss het werk van Lobachevski ontdekte, raadde hij de Bolyais aan het te lezen. Bolyai jr. verdacht Gauss er toen van dat '*Gauss - a colossus, who was in possession of great treasures even without this - could not accept the fact that someone had anticipated him in the question. Since he was no longer in a position to block its appearance, he reworked the theory and published it under the name of Lobachevski.*'
Er waren meer redenen in en buiten de wiskunde om het ruimtebegrip te verruimen. Het werken met meerdere variabelen in de vectorrekening en meervoudige integra-

len brachten de noodzaak van meerdimensionale ruimten met zich mee. Maar ook vanuit de geodesie, optica en mechanica ontstond de behoefte aan krachtiger wiskundige methoden. Toen Einstein zijn relativiteitstheorieën formuleerde, was dit omgekeerd ook weer een grote stimulans voor de niet-Euclidische meetkunde, met name voor de Riemannmeetkunde. In één eeuw tijd was het ruimtebegrip uitgebreid van een driedimensionale Euclidische ruimte tot een complex systeem van verschillende soorten meetkunde en velerlei toepassingen, onder andere in de natuurkunde.
Voor wie is dit boek interessant? Het boek stelt vrij hoge eisen aan de voorkennis en portemonnee van de lezer. Maar voor wie een oude (of zelfs verse) liefde koestert voor de meetkunde, kan dit uitstekende boek een ritje naar een boekhandel of universiteitsbibliotheek waard zijn.

Arthur Bakker

Arthur Bakker is docent wiskunde aan het Spinoza Lyceum te Amsterdam.

Excuses van de puzzleredacteur

Door een samenloop van omstandigheden deze keer geen Recreatie.

Jan de Geus

Creatieve wiskunde in Centraal Europa

Van maandag 21 t/m zondag 27 september 1998 organiseert het Europees Platform voor het Nederlandse Onderwijs een studiebezoek naar Oostenrijk, Slowakije en Hongarije met als thema:

'Creatieve wiskunde en de nieuwe bovenbouw'

Het studiebezoek is bestemd voor wiskundedocenten die lesgeven in de bovenbouw van het HAVO en het VWO.
Omdat het Nederlandse wiskundeonderwijs internationaal een belangrijke plaats inneemt leent dit vak, met zijn eenduidige begrippenkader, zich bij uitstek voor internationale vergelijking. In de jaren 1994 t/m 1997 werden bezoeken gebracht aan Schotland, Duitsland, Denemarken en Zweden waar het wiskundeonderwijs grondig werd bestudeerd middels lezingen, workshops en schoolbezoeken.
Tijdens dit studiebezoek wordt het wiskundeonderwijs in genoemde landen, elk met hun eigen traditie en verworvenheden, onder de loep genomen.
Het Oostenrijkse leerplan biedt interessante aspecten, terwijl in Slowakije en vooral in Hongarije aansprekende experimenten zijn opgezet die de Nederlandse wiskundigen zeker zullen aanspreken. Hoe hoog het peil van dit vak in Slowakije en Hongarije is moge blijken uit het feit dat bij Wiskunde-Olympiades deze landen steeds zeer hoog scoren (Hongarije werd in 1997 tweede). Een ander facet van het wiskundeonderwijs in die twee landen is dat er veel waarde wordt gehecht aan een brede toegankelijkheid.

Inhoud
Het programma omvat, in alle drie te bezoeken landen, voordrachten, schoolbezoeken en gedachtewisseling met collega's.

Reisplan
21/9 per vliegtuig naar Wenen.
Bezoeken aan instellingen en scholen in Wenen, vervolgens per bus naar Bratislava en Boedapest.
27/9 terugkeer per vliegtuig naar Amsterdam.

Reisleider
Hans van Lint, voorzitter NVvW

Prijs & accommodatie
Door een subsidietoekenning van het Europees Platform kan de reissom worden gereduceerd tot ƒ 650,– per persoon.
Overnachtingen in goede hotels op basis van 2p-kamers en halfpension.

Opgeven
Bent u geïnteresseerd dan kunt u zich schriftelijk opgeven onder vermelding van uw naam en adres en die van uw school. Het adres is:
Het Europees Platform voor het Nederlands Onderwijs
t.a.v. drs. Gover Werther, coördinator studiebezoeken
Europees Platform, Nassauplein 8, 1815 GM Alkmaar

Wenst u nadere informatie dan belt u 072-5118502 tijdens kantooruren.



KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in dit schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
6	19-03-98	05-02-98
7	01-05-98	19-03-98
8	18-06-98	07-05-98

Wat en Waar is Wiskunde II
Maandagochtend 9.30 TV
9/2, 16/2, 2/3, 9/3
Herhaling WWW II: donderdag 12/3
Herhaling WWW I : donderdag 26/3
Zie aankondiging blz. 130 in 73-4

VMBO: leerwegen in uitvoering
do. 19 februari 1998
Algemene conferentie
Mesoconsult: 013-4560311

Regionale bijeenkomsten NVvW
do. 12 maart 1998: Visser 't Hooft, Leiden
wo. 18 maart 1998: Greijdanus, Zwolle
di. 24 maart 1998: Hogeschool, Eindhoven
16.00 - 20.00
Zie aankondiging blz. 128 in 73-4

Panama-conferentie
do. 19 / vr. 20 maart 1998
panama@fi.ruu.nl
Fi: 030-2611611

Kangoeroe
vr. 20 maart 1998
TU Eindhoven: 040-2472738
jand@win.tue.nl

Wiskunde en de Grafische Rekenmachine
wo. 25 maart 1998
APS-conferentie: merken, didactiek, laatste nieuws
APS: 030-2856722

Wiskunde Olympiade Voorronde
vr. 3 april 1998
Cito: 026-3521294
Fred.Bosman@cito.nl

Wiskunde uit de kunst
do. 16 april 1998
Symposium Abacus, Utwente
053-4893435

33e Nederlands Mathematisch Congres
do. 16 april / vr. 17 april 1998
UTwente, R.M.J. van Damme
053-4893417
Aankondiging volgt later

Wiskunde in de ROC's
do. 23 / vr. 24 april 1998
twin@fi.ruu.nl
Aankondiging volgt later

Examendata
vbo B:
do. 14 mei 1998
vbo/mavo C/D:
di. 19 mei 1998
havo wiskunde A:
vr. 15 mei 1998
havo wiskunde B:
wo. 27 mei 1997
vwo wiskunde A:
di. 19 mei 1998
vwo wiskunde B:
vr. 15 mei 1998

Regionale bijeenkomsten TWIN
di. 12 / di. 19 mei 1998
twin@fi.ruu.nl

HKRWO-symposium: Leren door doen
za. 30 mei 1998
Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs
E. de Moor: 020-6121382
Zie aankondiging blz. 161

M.C. Escher conferentie
24-28 juni 1998
Rome, Ravello, Italië
www.mat.uniromal.it/escher98

Internetsites voor wiskundedocenten:

Een bijzonder nuttige homepage over het gebruik van de Grafische Rekenmachine, ook bij andere vakken, is te vinden op: www.euronet/nl/users/visboer/index.htm

Wilt u nog eens bekijken wat u gemist heeft bij de BBC-Christmas-Lectures over wiskunde: www.ri.ac.uk/Christmas

Binnenkort het 33e Nederlandse Mathematisch Congres: www.math.utwente.nl/~nmc

Een site van het landelijk werkcontact Geschiedenis en Maatschappelijke functie van de Wiskunde: www.math.sci.kun.nl/math/werkgroepen/gmfw

Suggesties voor interessante sites graag e-mailen naar cph@xs4all.nl

PASCAL
een nieuwe dimensie

Thieme

hele pagina

(op film bijgeleverd)